विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 18 | जनवरी 1975 | संख्या 1

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 18, No 1, January, 1975, Pages 1-10

प्राचीन मुद्राओं के अध्ययन में पुरातत्व रसायन का उपयोग

स्वामी सत्यप्रकाश सरस्वती*

विज्ञान परिषद् प्रयाग द्वारा आयोजित इस विज्ञान-अनुसन्धान गोष्ठी में मैं आपका ध्यान **पुरातत्व रसायन** के महत्व की ओर आकर्षित करना चाहता हूँ। इण्डियन सांइस कांग्रेस के वार्षिक समारोह के अवसर पर विज्ञान परिषद् ने इस प्रकार की गोष्ठियों की आयोजना की है जिनकी अपनी निजी विशेषता है। पुरातत्व-रसायन अभी तक रसायन के क्षेत्र में इन कांग्रेसों के समारोहों में अधिकृत स्थान प्राप्त नहीं कर पाया है। संभव है, कालान्तर में इस विषय के सम्बन्ध में लोगों की अधिक रुचि जागृत हो जाय। आज तो यह विषय साधारणतया उपेक्षित ही माना जाता है। पुरातत्व शब्द का प्रयोग मैं संकुचित अर्थों में ही करना चाहता हूँ। मनुष्य ने अपनी सभ्यता और संस्कृति के विकास में युग-युगान्तरों में बहुत सी सामग्री अपने कौशल द्वारा बनायी—उसका उद्देश्य तो यह न था कि यह सामग्री युगों तक सुरक्षित रक्खी जायगी। उसकी बनायी इस सामग्री में से बहुत सी तो विनष्ट हो गयी। फिर भी कुछ वस्तुयें दैवयोग से या विचित्र संयोग से जीर्णशीर्ण अवस्था में सैकड़ों वर्षों की विपरीत परिस्थितियों का सामना करते हुए भी हमारे पास आज तक सुरक्षित या अल्परक्षित अवस्था में विद्यमान हैं। यह हमारी पुरातत्व-सामग्री है, जिसे इस युग में अजायबघरों (म्यूजियमों) में वर्गीकृत करके सुरक्षित रखने का प्रयत्न किया जाता है। पिछली शतियों में धनीमानी परिवारों में कुछ पुरानी परम्परागत वस्तुयें सँभाल कर रक्खी जाती थीं—राजघरानों में ऐसा बहुधा होता था, पर म्यूजियमों का निर्माण उन्नीसवीं और बीसवीं शती की विशेष देन है। इनकी संस्थापना केवल कौतूहल के लिए नहीं की जाती। किलों की पुरानी दीवारें उस समय का, जब कि वे बनी थीं, जीता-जागता इतिहास हैं—निर्माण कौशल का भी, और उस समय के ज्ञान-विज्ञान का भी। आज तो यह विषय स्वयं एक शास्त्र बन गया है—'म्यूजियम साइंस' अर्थात् संग्रहालय-विज्ञान। संग्रहालय-विज्ञान का ही एक अंग है **'पुरातत्व-रसायन'**। 1875 ई० से पूर्व पुरातत्व-रसायन नाम का कोई रसायन का विभाग न था। 1875 में ओलिम्पिया (Olympia) के पुराने खंडहरों का खनन वैज्ञानिक ढंग से किया गया, और तभी से पुरातत्व-रसायन नाम का ज्ञान-क्षेत्र हमारे सामने प्रस्तुत हुआ। यह ठीक है कि इस वर्ष से पहले भी कतिपय रसायनज्ञों ने पुरातत्व की कुछ

---

*2 जनवरी 1975 को दिल्ली में आयोजित, विज्ञान अनुसंधान गोष्ठी पर दिया गया अध्यक्ष-पदीय भाषण

सामग्री का रासायनिक विश्लेषण किया था। इन प्रसिद्ध-रसायनज्ञों में कुछ उल्लेखनीय ये हैं—क्लेपरॉथ (Klaproth,1795), डेवी (Davy, 1815), बर्ज़ीलियस (Berzelius,1836), गोबेल (Goebel, 1842), मैलेट (Mallet, 1853), वोकेल (Wocel, 1855), बीब्रा (Bibra, 1869), फैरेडे (Faraday, 1867).

पुरातत्व रसायन के समस्त कार्य को तीन युगों में विभाजित कर सकते हैं। पहला युग उन्नीसवीं शती की अन्तिम दशाब्दियों से आरम्भ होता है। इस युग में सबसे उल्लेखनीय कार्य प्रोफेसर विलियम गाउलैण्ड (William Gowland) का है। उन्होंने यूरोप में उपलब्ध कुछ पुरातत्व-सामग्री का सावधानी से रासायनिक परीक्षण किया। उस युग के पुरातत्ववेत्ता अति संकीर्ण दृष्टिकोण के थे। वे अपने संग्रहालयों की वस्तुओं को छूने भी नहीं देते थे। पुरातत्व की यह सामग्री दूर से ही देखने की वस्तु थी। लोगों को इस सामग्री को सुरक्षित रखना भी नहीं आता था। पुरातत्व संबंधी इन संग्रहालयों पर इतिहास-प्रेमियों का ही अधिकार था। जनता के कौतूहल की ही वस्तुयें इनमें थीं। ऐसे समय में गाउलैण्ड के कार्य ने कुछ नयी प्रेरणा दी और लोगों को आशा लगने लगी कि पुरानी उपलब्धियों की रासायनिक परीक्षा से भी कुछ महत्वपूर्ण तथ्य निकाले जा सकेंगे। पुरातत्व-रसायन का यह युग 1880 से 1920 तक लम्बा चला और हमारे देश में तो यह अभी तक चला जा रहा है। इस युग के विद्वानों को इतने मात्र से ही सन्तोष हो जाता है कि एक-दो पुराने उपलब्ध पदार्थों की हलकी सी रासायनिक परीक्षा हो जाय—कुछ स्थूल अवयवों की—बस इतना ही, इतने से अधिक और कुछ नहीं। संग्रहालय में कोई नया पदार्थ आया, तो उसकी नाप-तौल हो गयी, उसके रूप या आकृति का वर्णन दे दिया गया, उसके ऊपरी रंग का, बस ऐसी ही दो चार बातों के विवरण को अब तक यथेष्ठ और पर्याप्त माना जाता था। दिल्ली, लखनऊ, मथुरा, हैदराबाद, बम्बई, पटना, सबके संग्रहालयों का यही हाल है।

यूरोप में प्रथम महायुद्ध 1918 में समाप्त हुआ। इसके एक-दो वर्ष बाद पुरातत्व-रसायन का दूसरा युग आरम्भ हुआ। प्रथम और द्वितीय युद्ध के बीच की अवधि में इंग्लैण्ड में ब्रिटिश-एसोसियेशन सुमेरि-अन कॉपर कमेटी (British Association Sumerian Copper Committee) की संस्थापना हुई। इस समिति की प्रेरणा से प्रोफेसर डेश (Desch) ने अनेक देशों से प्राप्त प्राग्-ऐतिहासिक काल की कतिपय वस्तुओं की रासायनिक परीक्षा की। यूरोप के पूर्वी देशों से उपलब्ध (या निकट में ही एशिया से उपलब्ध) कुछ सामग्री का भी विश्लेषण किया गया। जर्मन देश में विटर (Witter) और ऑटो (Otto) ने जर्मन देश के कतिपय प्राचीन पदार्थों का विश्लेषण भी इसी युग में किया।

पुरातत्व रसायन का तीसरा युग द्वितीय महायुद्ध की समाप्ति के बाद आरम्भ होता है। यह हमारा वर्तमान युग है। यूरोप के लगभग सभी देशों में पुरातत्व रसायन के क्षेत्र में अच्छा काम आरम्भ हो गया है। सभी बड़े संग्रहालयों में सम्पन्न रसायन-प्रयोगशालायें हैं और पुरातत्व-रसायन की सहायता के बिना इन संग्रहालयों का कार्य अधूरा समझा जाता है।

पिछले पच्चीस-तीस वर्षों में यूरोप और अमरीका के अनेक उन्नत देशों में पुरातत्व-रसायन का काम प्रगति से चल रहा है। पुरानी धातुओं से संबंध रखने वाले अनुशीलन को ऑस्ट्रिया में पिटिओनी (Pittioni) और उसके सहयोगियों से अच्छा प्रोत्साहन मिला। जर्मन देश में इस दिशा में यूनघन्स

(Junghans), सैंगमाइस्टर (Sangmeister) और ऑटो (Otto) ने अच्छा काम किया। उत्तरी यूरोप के प्राग्-ऐतिहासिक काल के धातुकर्म के संबंध में एण्ड्रीअस ओल्डेबर्ग (Andreas Oldeberg) ने हमारे ज्ञान की वृद्धि की। चेकोस्लावाकिआ के लोह-कर्म के संबंध में प्लाइनर (Pleiner) का काम उल्लेखनीय है। इटली में मेरिओ बर्टोलोने (Mario Bertolone) ने वर्सी (Verse) में वैज्ञानिक अनुशीलन-संस्थान (Scientific Study Centre) इसी प्रकार के शोध कार्य के निमित्त खोल रक्खा है। मेरिओ बर्टोलोने ने स्टोर्टी (Storti) के सहयोग से पुरातत्व-धातुओं के अनुशीलन की एक विस्तृत आयोजना हाथ में ली। इटली में एक दूसरा भी केन्द्र इस दिशा में अच्छा कार्य कर रहा है— सेण्ट्रो पर्ला स्टोरिआ डेला मेटालर्जिया (Centro perla Storia della Metallurgia) जिसका संबंध मिलानो नगर की इटली धातु-विज्ञान-समिति (Associazone Italiana di Metallurgia di Milano) से है।

पूर्वी देशों की पुरातत्व-सामग्री पर भी थोड़ा सा कार्य आरम्भ हुआ है। इस संबंध में ब्रेड-वुड (Braidwood) का सीरिअन ताम्र और कांस्य पर काम उल्लेखनीय है। प्रोफेसर जे० नीढम (J. Needham) और उनके सहयोगी वांगलिंग (Wang Ling) ने चीन देश की पुरानी धातुओं पर अच्छा कार्य किया है। इंगलैंड में भी इस दिशा में काफी प्रगति हुई है। ऑक्सफोर्ड में पुरातत्व और प्राचीन इतिहास विभाग में एक अच्छी यूनिवर्सिटी रिसर्च लेबोरेटरी है। पिट-रिवर्स म्यूजियम, ऑक्सफोर्ड, एवं लंडन के रॉयल एन्थ्रोपोलोजिकल इन्स्टीट्यूट की पुरातत्व खनन एवं धातुकर्म समिति (Ancient Mining and Metallurgy Committee) का काम भी जोरों से चल रहा है।

आयरलैंड में नेशनल म्यूजियम, डबलिन और बेलफास्ट म्यूजियम में भी पुरातत्व-रसायन संबंधी अच्छी प्रयोगशालायें हैं। कार्क यूनिवर्सिटी (Cork University) में ओ'केली (O'Kelly) ने अच्छा कार्य किया है। पुरातत्व-रसायन के क्षेत्र में अन्य उल्लेखनीय कार्यकर्त्ता संयुक्त राष्ट्र अमरीका में गेटेन्स (Gettens), इंगलैंड में प्लेण्डरलीथ (Plenderleith) और ऑर्गन (Organ), फ्रान्स में मेरचल (Marechal) और जापान में यामासाकी (Yamsaki) हैं। गेटन्स, ऑर्गन और प्लेण्डरलीथ का अधिकांश कार्य पुरानी उपलब्धियों के खनिजीकरण (mineralization) और पुनः संस्थापन (restoration) पर है। यामासाकी ने अधिकांश कार्य पुराने चित्रों और वर्णकों (pigments) पर किया है। मेरचल का कार्य प्राग्-ऐतिहासिक कालीन धातु-कर्म पर है।

यूनाइटेड स्टेट्स अमरीका में सबसे उल्लेखनीय कार्य तो प्रोफेसर केली (Earle R. Caley) का है, जिन्होंने रोम और यूनान के पुराने सिक्कों पर अच्छा कार्य किया है।

पुराने सिक्कों का काम वस्तुतः क्लैपरॉथ (Klaproth) के समय से प्रारंभ हुआ था। 1798-1815 के बीच में उसने रोम और ग्रीस की मुद्राओं पर अच्छा कार्य किया और इन सिक्कों की धातुओं के रासायनिक परिमापन भी किए—ये सिक्के तांबे, काँसे, पीतल और चाँदी के थे। उन्नीसवीं शती में विभिन्न कार्यकर्त्ताओं ने लगभग 500 प्राचीन-सिक्कों का परीक्षण कर डाला। इस परीक्षण-कार्य में सबसे महत्व का काम बीब्रा (Bibra) और हॉफमान (Hofmann) का है। हूल्ट्श (Hultsch) और हॉफमान दोनों ने ही स्वतंत्र रूप से मुद्राओं के घनत्व निकालने के महत्व की ओर ध्यान आकर्षित किया। चाँदी के सिक्कों में कितने प्रतिशत चाँदी है, यह बात केवल घनत्व निकाल कर मालूम की जा सकती है— इस

प्रकार की पद्धति का स्वतंत्र-रूपेण दोनों ने प्रचलन किया। सोने और इलेक्ट्रम धातु के बने सिक्कों का घनत्व निकालना भी इस दृष्टि से महत्व का था। मुद्रा-शास्त्र के अध्ययन में रासायनिक विधियों के प्रचलन का श्रेय हाफमॉन को है।

इन कार्यकर्त्ताओं के कार्य बहुधा अपने देश की सीमाओं के भीतर प्राप्त पुरानी उपलब्धियों तक ही सीमित थे। बीब्रा ने कुछ चीनी मुद्राओं का भी अध्ययन किया—पर इन मुद्राओं का स्पष्ट विस्तृत विवरण नहीं दिया और यह भी संदिग्ध रहा कि ये मुद्रायें कितनी पुरानी हैं। बीब्रा ने पारस-देश के तीन सिक्कों का भी रासायनिक अध्ययन किया (1873)। फ्लाइट (Flight, 1868) ने एक महत्वपूर्ण बैक्ट्रियन सिक्के की रासायनिक परीक्षा की— इस सिक्के में उसे ताँबा और निकेल धातु मिलीं। आपको स्मरण रखना चाहिये कि उन्नीसवीं शती में इतना काम हो चुका था कि भारतवर्ष में शायद केवल एक सिक्के के परीक्षण का विवरण मिलता है। यह सिक्का लेटसम (Lettsom) को प्राप्त हुआ था और वह लगभग शुद्ध चाँदी का था। इस सिक्के की रासायनिक परीक्षा के परिणाम फ्लाइट ने **जर्नल आव् केमिकल सोसाइटी** में 1882 में प्रकाशित किये।

पुराने सिक्कों पर थोड़ा बहुत काम होता रहा। 1908 में हैमर (Hammer) ने **जाइट० फूर० न्यूमिस्मैटिक** (*Zeitschrift Für Numismatik*) में एक लेख प्रकाशित किया, जिसमें उसने अपने समय तक पुराने सिक्कों पर जितना भी काम हो चुका था, उसका विवरण संग्रह करके दिया। यूनान की स्वर्ण और इलेक्ट्रम मुद्राओं (लगभग 300) के घनत्व भी उसने प्रकाशित किये (सोने और चाँदी की मिश्रधातु का नाम इलेक्ट्रम है)। बीसवीं शती के प्रथम पच्चीस वर्षों में जो कार्य इधर उधर होता रहा वह उनमें से आधा तो केवल घनत्व संबंधी ही था। शेष शोध निबन्धों में ग्रीक, रोमन और केल्टिक मुद्राओं के रासायनिक विश्लेषण की चर्चा तो रहती थी, पर प्रत्येक शोधकर्त्ता 2-4 मुद्राओं के विश्लेषण से ही सन्तोष कर लेता था।

1920 में चीकाशीगे (Chikashige) ने **जर्नल आव् केमिकल सोसायटी** में प्राचीन कांस्य मुद्राओं के रासायनिक विश्लेषण की विस्तृत चर्चा की और इसी प्रकार 1923 में चीन में वांग (Wang) नें वू-चू वंशीय मुद्राओं का विवरण **'साइन्स'** पत्रिका में प्रकाशित किया।

1930 से प्राचीन मुद्राओं के रासायनिक अध्ययन की ओर लोगों का ध्यान विशेष रूप से आकर्षित हुआ। इस युग के मुख्य प्रवर्त्तक प्रोफेसर केली थे। उन्होंने 1939 में प्राचीन ग्रीक कांस्य मुद्राओं पर विस्तृत विवरण प्रस्तुत किया, जो अमरीकन फिलोसोफिकल सोसाइटी के मेमोयर्स में छपा।

भारतवर्ष में यत्र-तत्र इस प्रकार का कुछ कार्य सरकारी रिपोर्टों में छपता रहा। सनाउल्लाह (Sanaullah, 1936-37) और हमीद (Hamid, 1927-28) ने कुछ प्राचीन ताम्रों, मिश्रधातुओं, प्लास्टरों और चूर्णों की परीक्षा की थी जो मोहन-जु-दाड़ो, हरप्पा और तक्षशिला से प्राप्त हुए थे। लाल (Lal) ने नालन्दा से प्राप्त कुछ प्राचीन ताम्रों और मिश्र-धातुओं पर काम किया। आत्माराम के सहयोगियों ने पुराने काँचों की परीक्षा की। **पुरातत्व-रसायन** का विस्तृत कार्य प्रयाग विश्वविद्यालय के रसायन-विभाग

में प्रारंभ हुआ, जब कि मेरे शिष्य एन० एस० रावत ने कौसाम्बी से प्राप्त कुछ सामग्री का रासायनिक अध्ययन किया।

विज्ञान-परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में 1960 में एक शोधनिबन्ध इस दिशा में प्रकाशित हुआ। 1965 में हम दोनों की एक पुस्तिका (एशिया पब्लिशिंग हाउस, बंबई, उत्तरप्रदेश साइंटिफिक रिसर्च कमेटी का मोनोग्राफ), 'Chemical Study of some Indian Archaeological Antiquities' नाम से प्रकाशित हुई। भारतीय मुद्राओं का अधिक विस्तृत अध्ययन मेरे शिष्य राजेन्द्र सिंह ने किया, जिसका विवरण एक बृहद् ग्रन्थ Coinage in Ancient India में दे दिया गया है (1968)। मेरे एक और शिष्य जे० वी० गोपालकृष्णमूर्ति ने प्राचीन मुद्राओं की विषमरूपता पर पराश्रव्यिकी विधि से कार्य किया।

1970 में मुझे संयुक्त राज्ज अमरीका के प्रसिद्ध नगर बोस्टन में एक अन्तर्राष्ट्रीय सम्मेलन में भाग लेने का अवसर मिला—इस सम्मेलन का उद्देश्य उन विषयों पर विचार करने का था जिनका संबंध कला और विज्ञान दोनों से है—'कला से सम्बन्ध रखने वाली उपलब्धियों के परीक्षण में विज्ञान का उपयोग।' इसी वर्ष मुझे वाशिंगटन स्मिथसोनियम म्यूजियमों की और ब्रिटिश म्यूजियम, लण्डन, की पुरातत्व प्रयोगशालायें देखने का अवसर भी मिला। पेरिस नगर का जगत्-विख्यात संग्रहालय लू (Louvre) नामक है। यहाँ की अनुसन्धान-अध्यक्ष श्रीमती मेडेलाइन आवर्स (Mme. Madeline Hours) से भी मेरी भेंट हुई। ब्रूकलीन की प्रयोगशालायें भी मैंने देखीं। इन प्रयोगशालाओं को देखकर मेरी रुचि पुरातत्व-रसायन संबंधी कार्य के प्रति बढ़ी।

पुरातत्व-रसायन का क्षेत्र क्या है, संभवतया आप जानना चाहेंगे। प्राचीन भग्नावशेषों के गर्भ में दबी हुई आपको कोई सामग्री मिली-धातु की हो, पत्थर की हो, काँच की, मिट्टी की या लकड़ी की—पुरातत्व की खोदाई वाले आपको बतावेंगे, कि यह वस्तु कितनी गहराई पर मिली है और उस गहराई पर मिलीं वस्तुयें किस युग की हो सकती हैं। पुरातत्व खनन विज्ञान स्वयं अपने में एक शास्त्र है और उसका उल्लेख मैं यहाँ नहीं करना चाहता। जो पदार्थ आपको गड्ढे में दबा मिला है, सम्भवतः उसका कुछ भाग विकृत हो गया हो—वायु, जल और इसी प्रकार के अन्य कारणों से। धातुओं से बनी वस्तुओं में जंग लग जाता है; धातुओं के पृष्ठ का नमक आदि के कारण क्षरण (Corrosion) भी हो जाता है। क्षरण की गतिविधि का अध्ययन करना भी बड़ा लाभकर होगा। धातुओं के क्षरण का अपना रसायन है, और पुरातत्व में इसका प्रयोग करके उचित अनुमान लगाये जा सकते हैं।

क्षरण की अवस्था का अध्ययन करने के अनन्तर हमें धातु या अधातु की वस्तु को सावधानी के साथ साफ़ करना पड़ता है। सफ़ाई का काम यान्त्रिक और रासायनिक दोनों हो सकता है। जो लोग प्राचीन मुद्राओं पर कार्य करते हैं, उन्हें सावधानी रखनी पड़ती है कि मुद्रा पर अंकित लेख या चित्र यथाशक्य सुरक्षित बना रहे। मुद्रा या अन्य धातु-पत्रों पर बहुत से पदार्थों की तह जम जाती है—हो सकता है कि मुद्रा गढ़ी जाने के समय भी कम विलेयता की कोई चीज इसके पृष्ठ पर अवक्षेपित हो गयी हो। सीसा से बने कांसों के ऊपर (मिश्र धातु के पृष्ठ पर) शुद्ध सीसे की भी तह हो सकती है। बहुतों

के पृष्ठ पर स्लैग या धातुमल भी विद्यमान पाया जा सकता है। मेरे विद्यार्थी डा० गोपालकृष्ण मूर्ति ने सिक्कों की विषम-रूपता का अच्छा अध्ययन किया है। आधुनिक युग के अनेक सिक्के विभिन्न देशों के लेकर हमने अध्ययन किए। इन सिक्कों में समरूपता ही मिली, किन्तु पुरानी पद्धति पर ढाले गये सिक्के अनेक कारणों से विषमता लिए हुए थे। यवन और मुगल काल के भारतीय सिक्कों की विषम-रूपता पर भी हमने विस्तृत कार्य किया है और प्राचीन भारतयी सिक्कों पर भी।

पुराने सिक्कों में साधारणतया ताँबा, चाँदी, सोना, जस्ता और वंग (रांगा) ही पाया जाता है। निकेल धातु का ज्ञान तो हमें पुराने समय में न था, किन्तु जिन खानों से अन्य धातुयें निकाली जाती थीं, उनके खनिजों में यदि निकेल, लोह, कोबाल्ट, आदि की विद्यमानता हुई तो इनका परीक्षण भी कर लेना चाहिए। इतिहास की दृष्टि से ऐसे अध्ययन बड़े महत्व के माने जाते हैं। सूक्ष्म मात्रा में विद्यमान ये पदार्थ बता सकते हैं कि मुद्रा बनाने के लिए यह धातुयें कहाँ से ली गयी होंगी।

मेरे विद्यार्थी डा० राजेन्द्र सिंह ने इन मुद्राओं की न केवल स्थूल रासायनिक परीक्षा की, उन्होंने स्पेक्ट्रोग्राफिक विधि से सूक्ष्म और सूक्ष्मातिसूक्ष्म अवयवों की परीक्षा का प्रयत्न किया। रासायनिक परीक्षा में स्वभावतः एक दोष है—जिस सिक्के की हमें परीक्षा करनी होगी, उसे काटना पड़ेगा, अम्ल में घोलना पड़ेगा और ऐसा करने से सिक्का तो विकृत हो ही जायगा। इसीलिए कोई भी संग्रहालय हमें अपने मूल्यवान् दुष्प्राप्य सिक्के देने को तैयार नहीं होता। जो वस्तु जितनी दुष्प्राप्य होगी, संग्रहालय की दृष्टि से उतनी ही अधिक मूल्यवान। मूल्यवान वस्तु को आप दूर से तो देख सकते हैं पर काटकर ध्वस्त नहीं कर सकते। स्थूल रासायनिक परीक्षण के लिए 10-20 मिलीग्राम पदार्थ तो चाहिए ही। स्पेक्ट्रोस्कोपिक विधि के लिए बहुत अल्प मात्रा से भी काम चल सकता है। अतः बहुधा चर्चा इस बात की की जाती है कि परीक्षण की विधि ध्वंसात्मक न हो तो अच्छा है। बोस्टन की जिस अन्तर्राष्ट्रीय कानफ्रेन्स का मैंने उल्लेख किया था, उसमें ध्वंसात्मक और ध्वंस निरपेक्ष (destructive and non-destructive) विधियों पर अच्छी चर्चा रही। एक्स-रश्मियों की सहायता से कुछ अध्ययन तो हो सकते हैं। एक्स-रश्मि प्रतिदीप्ति (fluorescence) के लिए अत्यल्पांश पदार्थ की आवश्यकता होगी। किसी वेधन यंत्र या ड्रिल से संग्रहालय की वस्तु का अल्पांश निकाला जा सकता है और फिर छेद को अच्छी तरह इतनी चतुराई से भरा जा सकता है कि दर्शक को पता भी न चले कि संग्रहालय की वस्तु क्षत हुई थी।

रोज़, क्यूटिटा और लार्सन (Rose, Cuttita and Larson) ने 1965 में भूगर्भीय पदार्थों के अध्ययन की एक विधि एक्स-रश्मि प्रतिदीप्ति-स्पेक्ट्रोग्राफी की दी, जिसका उपयोग संयुक्त राष्ट्र के नेशनल म्यूज़ियम की प्रयोगशाला के मॉरिस ई० सालमन (Maurice E. Salmon) ने भी किया। हम यहाँ किसी भी विधि की उपादेयता की आलोचना नहीं करना चाहते, पर केवल यही कहना चाहेंगे कि पुरातत्त्व रसायनज्ञ की महती आकांक्षा है कि पुरातत्व की वस्तु को छिन्न-भिन्न न करना पड़े (अथवा अति सूक्ष्म मात्रा में ही उसमें से कुछ भाग काट लिया जाय) और समूची अवस्था में ही इसका अध्ययन कर लिया जाय।

मैंने पेरिस के लू-म्यूज़ियम के पुरातत्त्व रसायन संबंधी कार्य का विवरण पढ़ा है। पुराने चित्रों के अध्ययन में फोटोग्राफी की विधि उपयोगी सिद्ध हुई है, यदि यह फोटोग्राफी विभिन्न तरंग-दैर्घ्यों

में की जाय। एक्स-रश्मि फोटोग्राफ़ी भी लाभकर है। पेरिस के इस संग्रहालय में विशेष कार्य प्राचीन धातुओं के संबंध का है—पदार्थ का साधारण रासायनिक परीक्षण जिससे मिश्रधातुओं के अवयवों का गुणात्मक और मात्रात्मक विश्लेषण हो जाय। दूसरी बात है, इतिहासज्ञों की सहायता से काल-निर्धारण और फिर इनका वर्गीकरण। धातु के पृष्ठ का अच्छे सूक्ष्मदर्शी यंत्र से परीक्षण करना भी बड़े महत्व का रहता है। मेरे शिष्य डा० राजेन्द्रसिंह ने अनेक मुद्राओं के पृष्ठ को साफ़ करने के अनन्तर पॉलिश किया और उन पृष्ठों के माइक्रोफोटोग्राफ़ लिए। जो लोग धातु विज्ञान के विवरणों से परिचित हैं, वे जानते हैं कि पृष्ठों के माइक्रोफोटोग्राफ साफ़ साफ़ बता सकते हैं कि धातु किन विधियों से कैसी परिस्थितियों में तैयार की गई है। मेरी प्रयोगशाला में इस दृष्टि से जितना परीक्षण भारतीय मुद्राओं पर कुशलतापूर्वक किया गया है, उतना यूनानी या रोम मुद्राओं पर भी नहीं हुआ है। डा० राजेन्द्रसिंह के सहयोग से लिखी गयी मेरी पुस्तक "Coinage in Ancient India" में ये माइक्रोफोटोग्राफ़ विस्तार से प्रकाशित किए गए हैं।

मुद्राओं का प्रचलन हमारे देश में वैदिक काल से रहा जिसका उल्लेख साहित्य में मिलता है। पाणिनि ने अपने सूत्रों में और अष्टाध्यायी पर पतंजलि का जो महाभाष्य है, उसमें शतमान, निष्क, सुवर्ण, पण, कार्षापण आदि सिक्कों का विवरण है। कौटिल्य ने अपने अर्थशास्त्र में एक सुवर्ण=1 कर्ष=80 गुञ्जा (=140 ग्रेन) इस प्रकार का संबंध बताया है। नगर में व्यापार के लिए आदर्शमान हाटक-निष्क या हाटक-कार्षापण कहलाता था। यह सोने का बना होता था। सुवर्ण माषक मुद्रा, या माषा नाम से दो सिक्के प्रचलित थे—सोने और तांबे का जो सिक्का होता था वह 5 रत्ती का था, चाँदी का माषा 2 रत्ती था।

हमारे देश में जो पुराने सिक्के मिले हैं, उन्हें आजकल के पुरातत्त्वविदों ने पंचाङ्कित मुद्रा (Punch-marked Coins) कहा है। चाँदी और तांबे की पंचाङ्कित मुद्रायें बहुत सी प्राप्त हुई हैं, जिन्हें तीन श्रेणियों में बाँटा जा सकता है—शतमान श्रेणी, विंशतिक श्रेणी और कार्षापण श्रेणी। इनकी तौल रत्तियों में (100 रत्ती=180 ग्रेन) जिस प्रकार है वह सारणी 1 में दी हुई है।

भारतवर्ष में सिक्के ढालने की प्रथा कब से चली, यह कहना कठिन है। यूनानियों के आने से पूर्व जो सिक्के बनते थे, वे कई आकृतियों के थे—चौकोर टुकड़े भी और कभी कभी गोल भी। डा० बीरबल साहनी को वनस्पतियों के प्राग्-ऐतिहासिक अवशेषों के अनुशीलन में बड़ी रुचि थी। दैवयोग से उनका ध्यान उन संसाधनों की ओर भी गया जिनसे मुद्रायें इस देश में तैयार की जाती थीं। भारतीय मुद्रानुशीलन समिति (Numismatic Society of India, 1945) ने डा० साहनी का एक विस्तृत लेख प्रकाशित किया। मुद्रा-निर्माण के ये साँचे एकबार में कई कई मुद्रायें ढाल सकते थे। डा० साहनी की इस उपयोगी सामग्री का उल्लेख विस्तार से मैं अपनी पुस्तक Coinage in Ancient India (काइनेज इन एन्शण्ट इण्डिया) में कर चुका हूँ।

जनता में असली राजकीय मुद्राओं के अतिरिक्त नकली मुद्रायें भी बहुधा प्रचलित कर दी जाती हैं। पुरातत्व रसायन का एक कार्य यह भी रहा है कि नकली मुद्राओं का पता लगावे। मुद्रा की पूर्ण

सारणी 1 मुद्राओं की श्रेणियां तथा उनकी तौल

शतमान श्रेणी (चांदी)	
शतमान	100 रत्ती
अर्धशतमान	50
त्रिशाण	37·5
पादशतमान (=द्विशाण)	=25
अध्यर्धशाण	=18·75
पादार्धशतमान (=शाण)	=12·5
अष्टमाग शतमान (अर्धशाण)	=6·25

विंशतिक श्रेणी (चांदी)	
त्रिविंशतिक	120 रत्ती
द्विविंशतिक	80
अध्यर्ध विंशतिक	60
विंशतिक	40
अर्व विंशतिक	20
पादविंशतिक (पञ्चमाषक)	10

कार्षापण (चांदी)	
कार्षापण (प्रति)	32 रत्ती
अर्धकार्षापण (=भाग)	16
पादकार्षापण	8
अष्टमाग कार्षापण	4
रौप्य अध्यर्धमाषक	3
रौप्य माषक	2
रौप्यत्रिकाकणी	1·5
द्विकाकणी	0·75
रौप्यकाकणी	0·5
रौप्यअर्धकाकणी	0·25

विंशतिक श्रेणी (तांबा)	
द्विविंशतिक	200 रत्ती
अध्यर्वविंशतिक	150
अर्धविंशतिक	50
पादविंशतिक	25

कार्षापण (तांबा)	
कार्षापण	80 रत्ती
अर्धकार्षापण	40
पाद कार्षापण	20
त्रिमाष	15
द्विमाष	10
माष	5
अर्धमाष	2·5
काकणी	1·25
अर्धकाकणी	0·623

विस्तृत परीक्षा करने से स्पष्ट पता चल जायेगा कि नकली मुद्रा में धातुयें बिलकुल वही नहीं हैं (अनुपात में भी भिन्न हैं) जो असली मुद्रा में थीं। ऐसे छल भारत में ही नहीं, सभी उन्नत देशों में बराबर होते रहते हैं।

कभी कभी देश में गरीबी होती है (विशेषतया भयंकर युद्धों के बाद)। ऐसे समय की मुद्राओं में कीमती धातु की मात्रा कम कर दी जाती है। पुरानी मुद्रायें गलाकर नयीं मुद्रायें तैयार की जाती हैं। कोई मुद्रा पुरानी गलाकर बनायी गयी है या नहीं, इसका कभी कभी पता रासायनिक विश्लेषण से चल जाता है। मान लीजिये कि पुरानी मुद्रा में जस्ता या वंग धातु है। मुद्रा जब गलायी जायगी तो ताप ऊँचा होने के कारण कुछ जस्ता या वंग धातु उड़ जायगी। इससे मुद्रा के धातु-अनुपात में अन्तर पड़ जायगा। धातु-अनुपात का यह अन्तर स्पष्ट बता देगा कि पुरानी मुद्रायें गला कर नयी मुद्रा तैयार की गयी है।

संग्रहालयों के प्रबन्ध में दूरदर्शिता बरतने की आवश्यकता पड़ती है। बहुत से संग्रहालयों में आप देखेंगे कि किसी प्राचीन युग की पत्थर की मूर्ति बाहर मैदान में पड़ी हुई है, जहाँ इसे वायु के झकोरे और धूप की मार और फिर वर्षा ऋतु में पानी की बौछारें सहनी पड़ती हैं। यह समझना कि पत्थर पर गर्मी-पानी का कोई भी प्रभाव नहीं पड़ता, यह भूल है। मैंने उत्तर प्रदेश के कतिपय संग्रहालयों में ऋतु का ध्वंसकारी प्रभाव स्पष्ट देखा है। मिट्टी के गर्भ में मूर्तियाँ लाचारी से कई सौ वर्ष पड़ी रहीं, वहाँ वे फिर भी सुरक्षित रहीं, किन्तु हमारे संग्रहालयों में 30-40 वर्ष में ही इनकी दुर्दशा हो गयी। हमारे देश की कड़ी धूप, धूप के बाद कड़ी बरसात, और फिर कड़ी सरदी-यह निर्जीव पत्थर के लिए भी घातक है, यह बात नहीं भूलनी चाहिए।

इस संबंध में मुझे वाशिंगटन के स्मिथसोनियन म्यूज़ियम की एक घटना याद आ जाती है। मैंने म्यूज़ियम की प्रयोगशाला में कुछ दिन बराबर आना-जाना आरंभ किया। एक दिन सायंकाल को जब लौट रहा था, तो उस दिन अपने देश की सी ही भयंकर वर्षा हुई—वाशिंगटन की सड़कें पानी से भर गयीं, और कई घंटे टैक्सी-बस-मोटर आदि का आना-जाना बन्द हो गया। दूसरे दिन प्रातःकाल जब मैं फिर म्यूज़ियम पहुँचा, मैंने देखा कि म्यूज़ियम प्रयोगशाला के सभी कार्यकर्त्ता हैरान थे, चेहरों पर चिन्ता थी, दैनिक कार्य बन्द कर दिया गया था। मैंने पूछा कि आखिर चिन्ता की बात क्या हो गयी। पूछने पर उन्होंने विगत सायं की वर्षा की ओर संकेत किया। उन्हें चिन्ता इस बात की थी कि वातावरण की आर्द्रता बढ़ गयी है—यह आर्द्रता पत्थर और धातु सब पर घातक प्रभाव डाल सकती है। आर्द्रता को संयमित करने की ओर म्यूज़ियम की सारी शक्ति उस दिन लगी थी। अधिकारियों और कर्मचारियों को चिन्ता थी कि म्यूज़ियम की सामग्री को कैसे बचाया जाय। क्या हमारे देश के संग्रहालयों के संचालकों का ध्यान कभी इस ओर जाता होगा?

क्या मैं आशा करूँ कि अपने देश के संग्रहालयों में पुरातत्व-रसायन के विकास के लिए पर्याप्त साधन जुटाये जायँ और अन्य उन्नत देशों के समान हम भी पुरातत्व रसायन की सहायता से पुराने इतिहास को आँकने में समर्थ हो सकें। हमें अपने वैज्ञानिकों का ध्यान भी इस ओर आकर्षित

करना है। उनकी रुचि इस नवीन अंग की ओर बढ़नी चाहिए। लंडन के ब्रिटिश म्यूजियम की प्रयोगशाला में कार्बन[14] की विधि की सहायता से काल-निर्धारण का अच्छा प्रबन्ध है। हमारे देश के एटॉमिक इनर्जी कमीशन की प्रयोगशाला से कभी कभी सहायता इस बात में मिली है। यूनिवर्सिटी में भी पुरातत्व रसायन में रुचि लेने वाले कभी कभी एक दो व्यक्ति हों, तो उनके सहयोग से पुरातत्व रसायन का गंभीरता से अध्ययन किया जा सकता है। राष्ट्रीय संग्रहालयों के अधिकारियों से मेरा विशेष आग्रह है कि पुरातत्व-रसायन की प्रयोगशालायें अपने संग्रहालयों में अवश्य स्थापित करें। भौतिकी विभाग और रसायन शास्त्र विभाग दोनों के सहयोग से सुचारु रूप से पुरातत्व-विज्ञान की प्रयोगशालाओं का कार्य आगे बढ़ना चाहिए।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 1, January 1975, Pages 11-16

फूरियर श्रेणी तथा उसकी संयुग्मी श्रेणियों के संकलनीयता गुणक

एल० पी० गौतम
रामपुर बघेलन, सतना

[प्राप्त—जनवरी 18, 1973]

सारांश

इस शोध पत्र में फूरियर श्रेणी तथा उसकी संयुग्मी श्रेणियों की संकलनीयता पर आगे कार्य किया गया है ।

Abstract

On the summability factors of Fourier series and its conjugate series.
By L. P. Gautam, Rampur Baghelan, Satna

The summability of Fourier series and its conjugate series has been extended.

1. परिभाषा

माना कि $\lambda=\lambda(\omega)$ संतत, अवकलनीय तथा (c, ∞) में समस्वनिक है जहाँ c कोई धनात्मक स्थिरांक है और $\lambda(\omega)\to\infty$, जब $\omega\to\infty$ $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ श्रेणी संकलनीय $|R, \lambda(n), 1|$ कहलाती है यदि

$$I=\int_c^{\infty} \frac{\lambda'(\omega)}{[\lambda(\omega)]^2} \left| \sum_{n\leqslant\omega} \lambda(n) U_n \right| d\omega<\infty,$$

जहाँ c कोई स्थिर धन संख्या है ।

माना कि $f(t)(-\pi, \pi)$ में लेबेस्क समाकलनीय है और आवर्त 2π के साथ आवर्ती है । माना कि इसकी फूरियर श्रेणी

$$\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt+b_n \sin nt)=\tfrac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t). \qquad (1\cdot1)$$

है । तब (1·1) की संयुग्मी श्रेणी (1·2) द्वारा दी जावेगी ।

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nt - a_n \sin nt) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t). \qquad (1{\cdot}2)$$

इस शोधपत्र में हम निम्नांकित संकेतों का प्रयोग करेंगे

$$\phi(t) = \tfrac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\}$$

$$\psi(t) = \tfrac{1}{2}\{f(x+t)-1(x-t)\}$$

$$E(\omega, t) = \int_t^{\eta} \left(\sum_{n \leqslant \omega} e^{n^{\alpha}} \frac{n^{\nu-\beta}}{\log (n+1)} \frac{\cos nu}{u} du \right)$$

$$\eta(\omega, t) = \int_t^{\eta} \left(\sum_{n \leqslant \omega} e^{n^{\alpha}} \frac{n^{\nu-\beta}}{\log (n+1)} \frac{\sin nu}{u} du \right)$$

$F(t) \in BV(h, k)$ से हमारा अभिप्राय है कि $F(t)(h, k)$ के ऊपर परिबद्ध विचरण वाला है।

2. फूरियर श्रेणी की रीज़ संकलनीयता के सम्बन्ध में मोहन्टी[1] ने निम्नांकित प्रमेय सिद्ध की है:

प्रमेय M

यदि $\phi(t) \in BV\ (0, u)$, तो $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x)}{\log (n+1)}$ संकलनीय $| R, e^{\omega^{\alpha}}, 1 |$ है जहाँ $0<\alpha<1$.

इसी प्रकार की एक प्रमेय फूरियर श्रेणी की संयुग्मी श्रेणियों पर रे[2] द्वारा निम्न रूप में सिद्ध की जा चुकी है :

प्रमेय R

यदि $\psi(t)\ BV\ (0. \pi)$ तथा $\int_0^{\pi} \frac{| \psi(t) |}{t} dt < \infty$,

तो $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n(x)}{\log (n+1)}$ संकलनीय $| R, e^{\omega^{\alpha}}, 1, |$ है जहाँ $0<\alpha<1$.

इस शोधपत्र का उद्देश्य उपर्युक्त प्रमेयों का, निम्नांकित सिद्ध करते हुये, विस्तार करना है :

प्रमेय A

यदि
$$\int_0^{\pi} t^{\beta-\nu-1} \, | \, d\{t\phi(t)\}| < \infty, \qquad (2{\cdot}1)$$

तो $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\nu-\beta} \frac{A_n(x)}{\log (n+1)}$ संकलनीय $| R, e^{\omega^{\alpha}}, 1, |$ है जहाँ $0<\alpha<1$, तथा $0<\beta\leqslant\nu<1$.

प्रमेय B

यदि
$$\int_0^{\pi} t^{\beta-\nu-1} \, | \, d\{t\psi(t)\} \, | < \infty, \qquad (2{\cdot}2)$$

तो $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\nu-\beta} \frac{B_n(x)}{\log(n+1)}$ संकलनीय $| R, e^{\omega^{\alpha}}. 1, |$ है जहाँ $0<\alpha<1$, तथा $0<\beta\leqslant\nu<1$.

यहाँ यह ध्यान दिलाना चाहेंगे कि $\beta=\nu$ होने पर प्रमेय M तथा R प्रमेय में समानीत हो जाते हैं।

प्रमेयों की उपपत्ति के लिये निम्नांकित आँकडों का उपयोग करेंगे :

$$E(\omega, t)=0(e^{\omega^{\alpha}}(\log\omega)^{-1}\omega^{\nu-\beta-\alpha+1}) \tag{2·3}$$

$$E(\omega, t)=0(t^{-2}e^{\omega^{\alpha}}(\log\omega)^{-1}\omega^{(\alpha-1)(\nu-\beta-1)}) \tag{2.4}$$

$$E(\omega, t)=0(t^{-1}e^{\omega^{\alpha}}(\log\omega)^{-1}\omega^{(\alpha-)(\nu-\beta-\alpha+1)}(\omega^{-1}) \tag{2·5}$$

$$\eta(\omega, t)=0(e^{\omega^{\alpha}}(\log w)^{-1}\omega^{\nu-\beta-1)}\omega^{-1}) \tag{2·6}$$

$$\eta(\omega, t)=0(t^{-2}e^{\omega^{\alpha}}(\log\omega)^{-1}\omega^{(\alpha-1)(\nu-\beta-1)}) \tag{2·7}$$

$$\eta(\omega, t)=0(t^{-1}e^{\omega^{\alpha}}(\log\omega)^{-1}\omega^{(\alpha-1)(\nu-\beta-1}\omega^{-1}) \tag{2·8}$$

(2·3) की उपपत्ति :

$\sin nt\leqslant nt$

अतः

$$E(\omega, t)=\int_t^{\eta}\left(\sum_{n\leqslant\omega} e^{n^{\alpha}}\frac{n^{\nu-\beta}}{\log(n+1)}\frac{\cos nu}{\omega}\,du\right)$$

$$=\frac{1}{t}\sum_{n\leqslant\omega} e^{n^{\alpha}}\frac{n^{\nu-\beta}}{\log(n+1)}\left(\int_t^{\eta}\cos nu\,du\right)$$

$$=\frac{1}{t}\sum_{n\leqslant\omega} e^{n^{\alpha}}\frac{n^{\nu-\beta}}{\log(n+1)}\frac{\sin nt}{n}$$

$$\leqslant\frac{1}{t}\sum_{n\leqslant\omega} e^{n^{\alpha}}\frac{n^{\nu-\beta}}{\log(n+1)}\frac{nt}{n}$$

माना कि $[\omega]=m$,

अतः

$$\left|\sum_{n\leqslant\omega} e^{na}\right|=\left|\sum_1^m e^{n^{\alpha}}\frac{n^{\nu-\beta}}{\log(n+1)}\right|$$

$$\leqslant\int_1^{\omega} e^{x^{\alpha}}\frac{x^{\nu-\beta}}{\log(n+1)}\,dx+e^{m^{\alpha}}\frac{m^{\nu-\beta}}{\log(m+1)}$$

$$=0\left\{\frac{\omega^{\nu-\beta-\alpha+1}}{\alpha(\log w)}\int_1^{\omega} e^{x^{\alpha}}\alpha x^{\alpha-1}\,dx\right\}+0\left(e^{\omega^{\alpha}}\frac{\omega^{\nu-\beta}}{\log\omega}\right)$$

$$=0(w^{\nu-\beta-\alpha+1}(\log\omega)^{-1}e^{\omega^{\alpha}}).$$

(2·4) **की उपपत्ति:**

द्वितीय मध्यमान प्रमेय का उपयोग करने पर

$$E(\omega, t)=\Big(\sum_{n\leqslant\omega} e^{n\alpha}\frac{n^{\nu-\beta}}{\log (n+1)}\int_t \frac{\cos nu}{u}\, du$$

$$=\Big(\frac{1}{t}\sum_{n\leqslant\omega} e^{n^{\alpha}}\frac{n^{\nu-\beta}}{\log (n+1)}\int_t^{\pi} \cos nu\; du\Big)$$

$$=\frac{1}{t}\sum_{n\leqslant\omega} e^{n^{\alpha}}\frac{n^{\nu-\beta}}{\log (n+1)}\frac{\sin nt}{n}$$

$$(2\cdot4\text{-}1)\leqslant\frac{e^{\omega^{\alpha}}}{t}\sum_{1}^{\omega}\frac{n^{\nu-\beta-1}}{\log (n+1)}\sin nt$$

$$\leqslant\frac{e^{\omega\alpha}}{t}\sum_{[\omega^{\alpha-1}]}^{\omega}\frac{n^{\nu-\beta-1}}{\log (n+1)}\sin nt \quad (0<\alpha<1).$$

ω को काफी बड़ा मानने पर ऐबेल की आशिक संकलन विधि द्वारा हमें निम्नांकित प्राप्त होगा

$$E(\omega, t)=\frac{1}{t}e^{\omega^{\alpha}}\frac{\omega^{(\alpha-1)(\eta\ \beta-1}}{\log \omega^{\alpha-1}}\sum_{\omega^{\alpha-1}}^{\omega}\sin nt$$

$$=0\left(\frac{1}{t^2}e^{\omega^{\alpha}}\frac{\omega^{(\alpha-1)(\nu-\beta-1)}}{\log \omega}\right)$$

(2·5) **की उपपत्ति:** (2·4·1) से चलने पर हम लिख सकते हैं :

$$E(\omega, t\}=\frac{c^{\omega^{\alpha}}}{t}\sum_{[\omega^{\alpha-1}]}^{\omega}\frac{n^{\nu-\beta-1}}{\log (n+1)}\sin nt$$

$$\leqslant\frac{e^{\omega^{\alpha}}}{t}\frac{\omega^{(\alpha\ 1)(\nu-\beta-1)}}{\log \omega^{\alpha-1}}\sum_{[\omega^{\alpha 1}]}^{\omega}\sin nt$$

$$=0\left(\frac{e^{\omega^{\alpha}}}{t}\frac{\omega^{(\alpha-1)(\nu-\alpha 1)}}{\log \omega}\frac{1}{\omega}\right)$$

इसी प्रकार से (2·3) (2·4) तथा (2·5) से आकल (2·6) (2·7) तथा (2·8) सरलता से उपलब्ध किये जा सकते हैं

प्रमेय A की उपपत्ति : हम अपनी प्रमेय को केवल $\nu>\beta$, के लिये सिद्ध करेंगे क्योंकि

$$A_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(t) \cos nt\, dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\phi(t)\frac{\cos nt}{t}\, dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{\cos nu}{u}\, du\right) d\{t\phi(t)\}.$$

श्रेणी $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\nu-\beta}\frac{A_n(x)}{\log (n+1)}$ संकलनीय $|R, e^{\omega^\alpha}, 1|$ होगी यदि

$$I=\int_0^{\infty} \alpha\,\omega^{\alpha-1} e^{-\omega^\alpha} d\omega \;\left|\sum_{n\leqslant\omega} e^{n^\alpha}\frac{A_n(x)}{\log (n+1)}\right|<\infty.$$

अब

$$I\leqslant\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{\pi} |\, d\{t\phi(t)\}\,| \int_e^{\infty} \omega^{\alpha-1} e^{-\omega^\alpha} d\omega \left|\sum_{n\leqslant\omega} e^{n^\alpha}\frac{n^{\nu-\beta}}{\log (n+1)}\int_t^{\pi}\frac{\cos nu}{u}\, du\right|$$

$$=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{\pi} |\, d\{t\phi(t)\}\,| \int_e^{\infty} \omega^{\alpha-1} e^{-\omega^\alpha} \,|\, E(\omega, t)\,|\, d\omega$$

इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिये यह दिखाना पर्याप्त होगा कि

$$K=\int_e^{\infty} \omega^{\alpha-1} e^{-\omega^\alpha} \,|\, E(\omega\, .\, t)\,|\, d\omega=0(t^{\beta-\nu-1}).$$

माना $T_1=t^{-1}$, $T_2=t^{-1/\alpha-1}$,

समाकलों को तीन खंडों में तोड़ने पर

$$K=\int_e^{\tau_1}+\int_{\tau_1}^{\tau_2}+\int_{\tau_2}^{\infty}.$$

$$=K_1+K_2+K_3 \text{ (माना गया)}$$

आकल (2·3) का उपयोग करने पर

$$K_1\leqslant A\int_e^{\tau_1} \omega^{\alpha-1} e^{-\omega^\alpha} e^{\omega^\alpha} \omega^{\nu-\beta-\alpha+1} (\log \omega)^{-1}\, d\omega$$

$$=A\left(\int_0^{1/t}\frac{\omega^{\nu-\beta}}{\log \omega}\, d\omega\right)$$

$$=0\left(t^{\beta-\nu}\int_0^{1/t}\frac{d\omega}{\log \omega}\right)$$

$$=0\left(t^{\beta-\nu-1}\frac{1}{\log \frac{1}{t}}\right)$$

$$\leqslant 0(t^{\beta-\nu-1}).$$

पुनः (2·4) से

$$K_2=(t^{-2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \omega^{\alpha-1} \frac{e^{\omega^\alpha} e^{-\omega^\alpha}}{\log \omega} \omega^{(\alpha-1)(\nu-\beta-1)} d\omega)$$

$$=0(t^{-2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\omega^{(\alpha-1)}}{\log \omega} \omega^{(\alpha-1)(\nu-\beta-1)} d\omega)$$

$$=0\left(t^{\beta-\nu-1}\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{d\omega}{\omega^{1-\alpha}\log \omega}\right)$$

$$\leqslant 0(t^{\beta-\nu-1}).$$

अन्त में (2·5) की सहायता से

$$K_3=0\left(\frac{1}{t}\int_{\tau_2}^{\infty} \frac{\omega^{\alpha-1} e^{\omega^\alpha} e^{-\omega^\alpha}}{\omega(\log \omega)} \omega^{(\alpha-1)(\nu-\beta-1)} d\omega\right)$$

$$=0\left(\frac{1}{t}\int_{\tau_2}^{\infty} \frac{\omega^{(\alpha-1)(\nu-\beta)}}{\omega(\log \omega)^2} \log \omega \, d\omega\right)$$

$$=0\left(t^{\beta-\nu-1} \log \frac{1}{t}\int_{t^{-1/\alpha-1}}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega(\log \omega)^2}\right)$$

$$=0\left(t^{\beta-\nu-1} \log \frac{1}{t}\left[\frac{1}{\log \omega}\right]_{t^{-1/\alpha-1}}^{\infty}\right)$$

$$=0(t^{\beta-\nu-1}).$$

अतः $K=0(t^{\beta-\nu-1})$.

इससे प्रमेय A की उपपत्ति पूर्ण हो जाती है ।

प्रमेय B: इसकी उपपत्ति प्रमेय A के ही समान है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० बी० एल० गुप्ता का आभारी है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में मार्ग-दर्शन किया।

निर्देश

1. मोहंटी, आर०, **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1951, **52**, 295-320

2. रे, बी० के०, **मैथमेटिकल स्टूडेन्ट**, 1969, **37**, 91-100

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 1, January, 1975, Pages 17-25

दो चरों वाले फाक्स के सार्वीकृत H-फलन का व्युत्पन्न

एस० एल० राकेश
गणित विभाग, उदयपुर विश्वविद्यालय, उदयपुर (राजस्थान)

[प्राप्त—जुलाई 1, 1973]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य संक्रियात्मक कलन की सहायता से दो चरों वाले सार्वीकृत फाक्स के H-फलन के rवें व्युत्पन्न वाले कुछ सूत्र प्राप्त करना है।

Abstract

On the derivative of the generalised Fox's H-function of two variables. *By* S. L. Rakesh, Department of Mathematics, University of Udaipur.

The aim of this paper is to obtain some formulae involving the rth derivative of the generalised Fox's H-function of two variables[6] with the help of operational calculus. On account of the general nature of the $H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$-function, the results can be used as key formulae for obtaining the rth derivative of the various important special functions of two variables viz., generalised Meijers G-function of Sharma[12] Agarwal[1], Kampe de Feriet-function[2], Appell-functions (F_1, F_2, F_3, F_4), Whittaker-function etc. etc. and of single variable viz., Fox's H-function[5], Meijers G-function[9], Mac Roberts E-function, Maitland's generalised Hypergeometric function, Bessel-function, etc. etc. which occurs very frequently in applied Mathematics.

1. भूमिका

प्रस्तुत शोध पत्र में आये दो चरों वाले सार्वीकृत फाक्स के H-फलन को गुप्ता[6] ने परिभाषित किया है जिसे निम्न प्रकार से[11] प्रदर्शित किया जावेगा।

$$H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = H^{n_1, n_2, n_3;\ m_2, m_3}_{p_1, (p_2, p_3); q_1, (q_2, q_3)} \left[\begin{array}{c|c} x & ((a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})) \\ & ((c_{p_2}, \gamma_{p_2})); ((e_{p_3}; E_{p_3})) \\ y & ((b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})) \\ & ((d_{q_2}, \delta_{q_2})); ((f_{q_3}, F_{q_3})) \end{array} \right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} x_1\left(\begin{matrix}1-b_j;\ a_j;\ \alpha\cdot A,\ \beta.B,\ \xi+\eta\\ -,\ n_1;\ q_1,\ p_1\end{matrix}\right)\times$$

$$x_2\left(\begin{matrix}d_j;\ c_j;\ \gamma,\ \delta,\ \xi\\ m_2,\ n_2;\ q_2,\ p_2\end{matrix}\right) x_3\left(\begin{matrix}f_j;\ e_j;\ E,\ F,\ \eta\\ m_3,\ n_3;\ q_3,\ p_3\end{matrix}\right) x^{\xi}y^{\eta}\, d\xi\, d\eta \quad , \quad . \quad . \quad (1\cdot1)$$

जहाँ

$$x_3\left(\begin{matrix}f_j;\ e_j;\ E,\ F,\ \eta\\ m_3,\ n_3;\ q_3,\ p_3\end{matrix}\right)=\frac{\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(f_j-F_j\eta)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_j\eta)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+F_j\eta)\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-E_j\eta)}$$

x तथा y शून्य के तुल्य नहीं हैं तथा रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया जाता है। साथ ही, ऋनृण पूर्णांक n_i, p_i, q_i तथा m_j ऐसे हैं कि

$$0\leqslant n_i\leqslant p_i,\ 0\leqslant q_1,\ 0\leqslant m_j\leqslant q_j (i=1,\ 2,\ 3;\ j=2,\ 3),$$

ग्रीक अक्षर $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ तथा समस्त बड़े अक्षर A, B, E, F, घन हैं।

(1·1) का समाकल निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अभिसारी होता है :

(i) $\theta_2\equiv \sum_{j=1}^{q_1}\beta_j+\sum_{j=1}^{q_2}\delta_j-\sum_{j=1}^{p_1}\alpha_j-\sum_{j=1}^{p_2}\gamma_j>0,$

(ii) $\theta_3\equiv \sum_{j=1}^{q_1}B_j+\sum_{j=1}^{q_3}F_j-\sum_{j=1}^{p_1}A_j-\sum_{j=1}^{p_3}E_j>0,$

(iii) $\phi_2\equiv \sum_{j=1}^{n_1}\alpha_j-\sum_{j=n_1+1}^{p_1}\alpha_j-\sum_{j=1}^{q_1}\beta_j+\sum_{j=1}^{m_2}\delta_j-\sum_{j=m_2+1}^{q_2}\delta_j+\sum_{j=1}^{n_2}\gamma_j-\sum_{j=n_2+1}^{p_2}\gamma_j>0,$

(iv) $|\arg x|<\frac{1}{2}\phi_2\pi,$

(v) $\phi_3\equiv \sum_{j=1}^{n_1}A_j-\sum_{j=n_1+1}^{p_1}A_j-\sum_{j=1}^{q_1}B_j+\sum_{j=1}^{m_3}F_j-\sum_{j=m_3+1}^{q_3}F_j+\sum_{j=1}^{n_3}E_j-\sum_{j=n_3+1}^{p_3}E_j>0,$

(vi) $|\arg y|<\frac{1}{2}\phi_3\pi.$

प्रयुक्त संकेत

इस शोधपत्र में सर्वत्र हम (1·1) में परिभाषित दो चरों वाले H-फलन के लिये $(a_1;\ \alpha_1,\ A_1)$, ..., $(a_{p_1};\ \alpha_{p_1},\ A_{p_1})$, $H\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ के स्थान पर $((a_{p_1};\ \alpha_{p_1},\ A_{p_1}))$ लिखेंगे तथा $n_1=0$ होने पर दो चरों वाले H-फलन के लिये $H_1\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ लिखेंगे। साथ ही हम निम्नांकित संकेतों

$$H^{n_1,n_2,n_3;\, m_2,m_3}_{p_1,(p_2,p_3);\, q_1,(q_2,q_3)}\left[\begin{matrix} x \\ \\ y \\ \end{matrix}\left|\begin{matrix} ((a_{p_1};\, \alpha_{p_1},\, A_{p_1})) \\ \ldots;\ldots \\ ((b_{q_1};\, \beta_{q_1},\, B_{q_1})) \\ \ldots;\ldots \end{matrix}\right.\right]$$

का उपयोग यह बताने के लिये करेंगे कि ... द्वारा प्रदर्शित प्राचल (1·1) में $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ के स्थान हैं । इसी प्रकार निम्नांकित संकेतों के लिये भी है ।

$$H^{n_1,n_2,n_3;\, m_2,m_3}_{p_1,(p_2,p_3);\, q_1,(q_2,q_3)}\left[\begin{matrix} \\ x \\ \\ y \\ \end{matrix}\left|\begin{matrix} \ldots \\ ((c_{p_2},\, \gamma_{p_2}));\ ((e_{p_3},\, E_{p_3})) \\ \ldots \\ ((d_{q_2},\, \delta_{q_1}));\ ((f_{q_3},\, F_{q_3})) \end{matrix}\right.\right] \text{ इत्यादि}$$

दो चरों वाले H फलन की विशिष्ट दशायें

यदि हम (1·1) में $\alpha_j = A_j$ ($j=1, \ldots, p_1$) तथा $\beta_j = B_j$ ($j=1, \ldots, q_1$) रखें तो यह एक ऐसे फलन में समानीत होता जाता है जो पाठक[10] के ही तुल्य है ।

यदि (1·1) में आये प्रत्येक अक्षर $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ तथा प्रत्येक बड़े अक्षर को इकाई के तुल्य मान लें तो हमें ऐसे फलन मिलेंगे जो सार रूप में शर्मा[12], अग्रवाल[1] द्वारा प्रचलित फलनों के ही समान है । साथ ही $H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ फलन कैम्पे द फेरी के फलन[2], ऐपेल के फलन [F_1, F_2, F_3, F_4], व्हिटेकर फलन तथा दो चरों वाले कई विशिष्ट फलनों का सार्वीकरण हैं ।

हम चिरसम्मत लैप्लास परिवर्त को निम्नांकित समाकल समीकरण द्वारा परिभाषित एवं अंकित करेंगे

$$L(f(x); s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx,\ R(s) > 0, \qquad \ldots \quad (1·2)$$

यदि दाहिनी ओर का समाकल अभिसारी हो ।

2. क्रमशः निम्नांकित फलों की आवश्यकता पड़ेगी :

(i) एर्डेल्यी [4, p. 129]

$$L(t^n f(s);\, s) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\, [L(f(t);\, s)] \qquad \ldots \quad (2·1)$$

(ii) एर्डेल्यी [4, p. 130]

$$L\left(t^m \frac{d^n}{dt^n} f(t);\, s\right) = \left(-\frac{d}{ds}\right)^m [s^n L(f(t);\, s] \qquad \ldots \quad (2·2)$$

(iii) गुप्ता [6, p. 122(1·2)]

$$L\left(t^{\rho} H_1\begin{bmatrix}xt^h\\ yt^k\end{bmatrix}; s\right)=s^{-\rho-1}\ H^{1,n_2,n_3;\ m_2,m_3}_{p_1+1,(p_2,p_3);\ q_1,(q_2,q_3)}\left[\begin{matrix}\frac{x}{s^h}\\ \\ \frac{y}{s^k}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(-\rho; h, k),\ ((a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\\ \ldots; \ldots\\ ((b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1}))\\ \ldots; \ldots\end{matrix}\right] \quad \ldots (2\cdot3)$$

बशर्ते कि $R(s)>0$, $h>0$, $k>0$, $R\left(\rho+1+h\frac{d_i}{\delta_i}+k\frac{f_j}{F_j}\right)>0$ $(i=1, \ldots, m_2; j=1, \ldots, m_3)$ तथा अनुभाग 1 में कथित (i) से (vi) तक के प्रतिबन्धों की तुष्टि होती हो।

(iv) राकेश[11]

$$s^{-\rho-1} H_1\begin{bmatrix}xs^{-h}\\ ys^{-k}\end{bmatrix}=L\left(t^{\rho} H^{0,n_2,n_3;\ m_2,m_3}_{p_1,(p_2,p_3);\ q_1+1,(q_2,q_3)}\left[\begin{matrix}xt^h\\ \\ yt^k\end{matrix}\middle|\begin{matrix}((a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1}))\\ \ldots; \ldots\\ ((b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1})),(-\rho; h, k)\\ \ldots; \ldots\end{matrix}\right]; s\right) \quad \ldots (2\cdot4)$$

बशर्ते $\sigma>0$, $R(s)>0$, $R\left(\rho+1+h\frac{d_i}{\delta_i}+k\frac{f_j}{F_j}\right)>0(i+1, \ldots, m_2;\ j=1, \ldots, m_3)$ तथा अनुभाग 1 में कथित (i) से (vi) तक के प्रतिबन्ध, जिनमें एकमात्र परिवर्तन यह है कि ϕ_2 तथा ϕ_3 के स्थान पर ϕ_2-h तथा ϕ_2-k हैं।

शर्मा के s-फलन[12], फाक्स के H-फलन[5] तथा माइजर के G-फलन[9] की परिभाषा से हमें (1·1) में से निम्नांकित गुण मिलते हैं।

$$H^{n_1,n_2,n_3;\ m_2,m_3}_{p_1,p_2,;\ q_3,(q_2,q_3)}\left[\begin{matrix}x\\ \\ y\\ \end{matrix}\middle|\begin{matrix}((a_{p_1}; 1, 1))\\ ((c_{p_2},1));((e_{p_3}, 1))\\ ((b_{q_1}; 1, 1))\\ ((d_{q_2}, 1));((f_{q_3}, 1))\end{matrix}\right]$$

$$=S\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}n_1, 0\\ p_1,-n_1, q_1\end{bmatrix}\\ \begin{pmatrix}n_2, m_2\\ p_2-n_2, q_2-m_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}n_3, m_3\\ p_3-n_3, q_3-m_3\end{pmatrix}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}((1-a_{p_1}));((1-b_{q_1}))\\ ((c_{p_2}));((d_{q_2}))\\ ((e_{p_3}));((f_{q_3}))\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\right] \quad \ldots (2\cdot5)$$

$L+y\to0$

$$H^{n_1,n_2,0;\; m_2,1}_{n_1,(p_2,0);\; q_1,(q_2,1)}\left[\begin{array}{c|c} x & ((a_{n_1};\alpha_{n_1},1)) \\ & ((c_{p_2},\gamma_{p_2})); \\ y & ((b_{q_1};\beta_{q_1},1)) \\ & ((d_{q_2},\delta_{q_2}));\;(0,1)\end{array}\right]$$

$$=H^{m_2,n_1,+n_2}_{n_1,+p_2,q_1+q_2}\left[x\;\middle|\;\begin{array}{l}((a_{n_1},\alpha_{n_1})),((c_{p_2},\gamma_{p_2}))\\((d_{q_2},\delta_{q_2})),((b^{q_1},\beta_{q_1}))\end{array}\right] \quad \ldots \quad (2\cdot6)$$

$$H^{m,n}_{p,q}\left[x\;\middle|\;\begin{array}{l}((a_p,1))\\((b_q,1))\end{array}\right]=G^{m,n}_{p,q}\left(x\;\middle|\;\begin{array}{l}((a_p))\\((b_q))\end{array}\right) \quad \ldots \quad (2\cdot7)$$

3. फल

इस अनुमाग में हम निम्नांकित फलों को सिद्ध करेंगे । इन फलों की वैधता के प्रतिबन्ध इस प्रकार हैं :

$R\left(\lambda+h\,\frac{d_i}{\delta_i}+k\frac{f_i}{F_i}\right)>0(i=1,\ldots,m_2\; j=1,\ldots,m_3)$, अनुभाग 1 में कथित (i) से (vi) तक के प्रतिबन्ध तथा

$t^{\lambda}\,H_1\begin{bmatrix}xt^h\\ yt^k\end{bmatrix}$ के rवें व्युत्पन्न को विद्यमान होना चाहिए ।

$$\frac{d^r}{dt^r}\left\{t^{\lambda}\,H_1\begin{bmatrix}xt^h\\ yt^k\end{bmatrix}\right\}=t^{\lambda-r}\,H^{1,n_2,n_3;\;m_2,m_3}_{p_1+1,(p_2,p_3);\;q_1+1,(q_2,q_3)}\left[\begin{array}{c|c} xt^h & (-\lambda;h,k),((a_{p_1};\alpha_{p_1},A_{p_1})) \\ & \ldots;\ldots \\ yt^k & ((b_{q_1};\beta_{q_1},B_{q_1})),(-\lambda+r;h,k) \\ & \ldots;\ldots\end{array}\right], \quad \ldots \quad (3\cdot1)$$

$$\left(t\,\frac{d}{dt}\right)^r\left\{t^{\lambda}\,H_1\begin{bmatrix}xt^h\\ yt^k\end{bmatrix}\right\}=t^{\lambda}\,H^{r,n_2,n_3;\;m_2,m_3}_{p_1+r,(p_2+p_3);\;q_1+r,(q_1,q_3)}\left[\begin{array}{c|c} xt^h & (-\lambda;h,k)_r,((a_{p_1};\alpha_{p_1},A_{p_1} \\ & \ldots;\ldots \\ yt^k & ((b_{q_1};\beta_{q_1},Bq_1)),(1-\lambda;h,k)_r \\ & \ldots;\ldots\end{array}\right], \quad \ldots \quad (3\cdot2)$$

$$\left(\frac{dt}{dt}\right)^r\left\{t^{\lambda}\,H_1\begin{bmatrix}xt^h\\ yt^k\end{bmatrix}\right\}=t^{\lambda}\,H^{r,n_2,\,n_3;\;m_2,m_3}_{p_1+r,(p_2,p_3);\;q_1+r,(q_2,q_3)}\left[\begin{array}{c|c} xt^h & (-1-\lambda;h,k)_r,\;((ap_1;\alpha_{p_1},A_{p_1})) \\ & \ldots;\ldots \\ yt^k & ((b_{q_1};\beta_{q_1},B_{q_1})),(-\lambda;h,k)_r \\ & \ldots;\ldots\end{array}\right] \quad \ldots \quad (3\cdot3)$$

$$\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)_r\left\{t^{\lambda} H_1\begin{bmatrix} xt^h \\ ytk \end{bmatrix}\right\} = t^{\lambda-2r} H^{r,n_2,\, n_3;\; m_2,m_3}_{p_1+r,(p_2,p_3);\; q_1+r,(q_2,q_3)}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} xt^h & (-\lambda; h, k), \ldots, (-2-\lambda+2r; h, k), ((a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})) \\ & \ldots; \ldots \\ ytk & ((b_{q_1}; \beta_{q_1}, A_{q_1})), (1-\lambda; h, k), \ldots, (-1-\lambda+2r; h, k) \\ & \ldots; \ldots \end{array}\right], \quad \ldots \quad (3\cdot4)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{t}\right)^r\left\{t^{\lambda} H_1\begin{bmatrix} xt^h \\ ytk \end{bmatrix}\right\} = t^{\lambda-2r} H^{r,n_2,n_3;\; m_2,m_3}_{p_1+r,(p_2,p_3),q_1+r,(q_2,q_3)}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} xt^h & (1-\lambda; h, k), \ldots, (-1-\lambda+2r; h, k), ((a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})) \\ & \ldots; \ldots \\ ytk & ((b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})), (2r-\lambda: h, k), \ldots, (2-\lambda; h, k) \\ & \ldots; \ldots \end{array}\right]. \quad \ldots \quad (3\cdot5)$$

उपपत्तियाँ :

(3·1) को सिद्ध करने के लिये हम (2·2) के दाहिनी ओर

$$f(t) = t^{\lambda} H_1\begin{bmatrix} xt^h \\ ytk \end{bmatrix}$$

लेते हैं, तो (2·3) के बल पर इसका मान निम्नांकित व्यंजक में समानीत हो जाता है :

$$\left(-\frac{d}{ds}\right)^R \left\{ s^{r-\lambda+1} H^{1,n_2,n_3;\; m_2,m_3}_{p+1,(p_2,p_3);\; q_1,(q_2,q_3)} \left[\begin{array}{c|c} xt^h & (-\lambda; h, k); ((a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})) \\ & \ldots; \ldots \\ ytk & ((b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})) \\ & \ldots; \ldots \end{array}\right] \right\} \quad (A)$$

(2·4) की सहायता मझले कोष्ठकों के भीतर की संख्या का व्युत्क्रम लैप्लास परिवर्त लेने पर और प्राप्त परिणाम में (2·1) का सम्प्रयोग करने पर (2·2) का दायाँ पक्ष

$$L\left(t^{\lambda-r-R} H^{1,n_2,n_3;\; m_2,m_3}_{p_1+1,(p_2p_3);\; q_1+1,(q_2,q_3)} \left[\begin{array}{c|c} xt^h & (-\lambda; h, k), ((a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})) \\ & \ldots; \ldots \\ ytk & ((b_{q_1}; \beta_{q_1}, C_{q_1})), (-\lambda+r; h, k) \\ & \ldots; \ldots \end{array}\right]; s\right) \quad (B)$$

के तुल्य हो जाता है।

अतः (2·2) निम्नांकित के तुल्य है

$$L\left(t^R \frac{d^r}{dt^r}\left\{t^\lambda H_1\begin{bmatrix} xt^h \\ yt^k\end{bmatrix}\right\}; s\right)$$

$$=L\left(t^{\lambda-r+R}H^{1,n_2,n_3;\ m_2,m_3}_{p_1+1,(p_2,p_3);\ q_1+1,(q_2,q_3)}\left[\begin{matrix} xt^h \\ \\ yt^k \\ \end{matrix}\left|\begin{matrix}(-\lambda; h, k), ((a_{p_1}, \alpha_{p_1}, A_{p_1})) \\ \ldots ; \ldots \\ ((b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})),(-\lambda+r; h, k) \\ \ldots ; \ldots\end{matrix}\right.\right]; s\right) \qquad (3\cdot6)$$

(3·6) की व्याख्या लर्च प्रमेय[8] की सहायता से करने पर हमें (3·1) प्राप्त होता है

(3·2) से (3·5) तक के परिणामों को (3·1)के क्रमिक सम्प्रयोग द्वारा सरलता से सिद्ध किया जा सकता है।

4. विशिष्ट दशायें

(i) (3·1) से लेकर (3·5) तक के परिणामों में यदि जितने भी उन्हें इकाई के तुल्य α', β', γ', δ', A', B', E', तथा F' हैं रखें तो (2·5) के बल पर हम S-फलन[12] का संगत व्युत्पन्न प्राप्त होगा।

(ii) यदि हम (3·1) से (3·5) में $n_3=p_3=0$, $m_3=q_3=1$ तथा $p_1=n_1$ रखें और (2·6) का उपयोग करें तो फाक्स के H-फलन[5] सम्बन्धी फल प्राप्त होंगे

$$\frac{d^r}{dt^r}\left\{t^\lambda H^{m_2,n_1+n_2}_{n_1+p_2,q_2+q_1}\left[xt^h\left|\begin{matrix}((a_{n_1}, \alpha_{n_1})),((c_{p_2}, \gamma_{p_2})) \\ ((d_{q_2}, \delta_{q_2})),((b_{q_1}, \beta_{q_1}))\end{matrix}\right.\right]\right\}$$

$$=t^{\lambda-r} H^{m_2,1+n_1+n_2}_{1+n_1+p_2,q_2+q_1+1}\left[xt^h\left|\begin{matrix}(-\lambda, h), ((a_{n_1}, \alpha_{n_1})),((c_{p_2}, \gamma_{p_2})) \\ ((d_{q_2}, \delta_{q_2})),((b_{q_1},\beta_{q_1})),((-\lambda+r, h)\end{matrix}\right.\right], \qquad (4\cdot1)$$

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^r\left\{t^\lambda H^{m_2,n_1+n_2}_{n_1+p_2,q_2+q_1}\left[xt^h\left|\begin{matrix}((a_{n_1}, \alpha_{n_1}))c_{p_2}, \gamma_{p_2})) \\ ((d_{q_2}, \delta_{q_2})),((b_{q_1}, \beta_{q_1}))\end{matrix}\right.\right]\right\}$$

$$=t^\lambda H^{m_2,r+n_1+n_2}_{r+n_1+p_2,q_2+q_1}\left[xt^h\left|\begin{matrix}(-\lambda, h)_r, ((a_{n_1}, \alpha_{n_1})),((c_{p_2}, \gamma_{p_2})) \\ ((d_{q_2}, \delta_{q_2})),((b_{q_1}, \beta_{q_1})),((1-\lambda, h)_r\end{matrix}\right.\right], \quad \ldots \qquad (4\cdot2)$$

$$\left(\frac{d}{dt}t\right)^r\left\{t^\lambda H^{m_2,n_1+n_2}_{n_1+p_2,q_2+q_1}\left[xt^h\left|\begin{matrix}((a_{n_1}, \alpha_{n_1})),((c_{p_2}, \gamma_{p_2})) \\ ((d_{q_2}, \delta_{q_2})),((b_{q_1}, \beta_{q_1}))\end{matrix}\right.\right]\right\}$$

$$=t^{\lambda}\, H^{m_2, r+n_1+n_2}_{r+n_1+p_2, q_2+q_1+r}\left[xt^h \left| \begin{matrix} (-1-\lambda, h)_r((a_{n_1}, \alpha_{n_1})), ((c_{p_2}, \gamma_{p_2})) \\ ((d_{q_2}, \delta_{q_2})), ((b_{q_1}, \beta_{q_1})), (-\lambda, h)_r \end{matrix} \right.\right], \tag{4·3}$$

$$\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)_r \left\{ t^{\lambda}\, H^{m_2, n_1+n_2}_{n_1+p_2, q_2 q_1}\left[xt^h \left| \begin{matrix} ((a_{n_1}, \alpha_{n_1})), ((c_{p_2}, \gamma_{n_2})) \\ ((d_{q_2}, \delta_{q_2})), ((b_{q_1}, \beta_{q_1})) \end{matrix} \right.\right] \right\}$$

$$t^{\lambda-2r}\, H^{m^2; r+n_1+r_2}_{r+n_1+p_2, q_2+q_1+r}\left[xt^h \left| \begin{matrix} (-\lambda, h), \ldots, (-2-\lambda+2r, h), ((a_{n_1}, \alpha_{n_1})), ((c_{p_2}, \gamma_{p_2})) \\ ((d_{q_2}, \delta_{q_2})), ((b_{q_1}, \beta_{q_1})), (1-\lambda, h), \ldots, (-1-\lambda+1r, h) \end{matrix} \right.\right] \quad \ldots \tag{4·4}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\,\frac{1}{t}\right)^r \left\{ t^{\lambda}\, H^{m_2, r_1, +n_2}_{n_1+p_2, q_2+q_1}\left[xt^h \left| \begin{matrix} ((a_{n_1}, \alpha_{n_1})), ((c_{p_2}, \gamma_{p_2})) \\ ((d_{q_2}, \delta_{q_2})), ((b_{q_1}, \beta_{q_1})) \end{matrix} \right.\right] \right\}$$

$$=t^{\lambda-2r}\, H^{m_2, r+n_1+n_2}_{r+n_1+p_2, q_2+q_1+1}\left[xt^h \left| \begin{matrix} 1-\lambda, h), \ldots, (-1-\lambda+2r, h), ((a_{n_1}, \alpha_{n_1})), ((c_{p_2}, \gamma_{p_2})) \\ ((d_{q_2}, \delta_{q_2})), ((b_{q_1}, \beta_{q_1})), (-\lambda+2r, h), \ldots, (2-\lambda, h) \end{matrix} \right.\right], \tag{4·5}$$

$n_1=q_1=0$ रखने पर (4·1) से लेकर (4·5) से हाल ही में जैन द्वारा प्राप्त फल [7, p. 191 (3·1)-(3.5)] प्राप्त होते हैं।

(iii) (4·1) से (4·5) तक $n_1=q_1=0$, α_j, β_j, δ_j तथा h को इकाई तुल्य रखने पर और (2·7) के उपयोग द्वारा हमें मिसे [3, p. 350] द्वारा प्राप्त माइजर के G-फलन के पदों में संगत फल प्राप्त होते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० यू० सी० जैन तथा डा० के० सी० गुप्ता का आभारी है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में पथ-निर्देश किया तथा महत्वपूर्ण सुझाव दिए।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइं० (इंडिया)**, 1965, **31**, 536.
2. ऐपेल, पी० तथा कैम्प द फेरी, Functions Hypergeometriques et hyperspheriques; polynomes d' Hermite Gauthier Villers, **पेरिस,** 1926.
3. मिसे, बी० एम०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इंडिया)**, 1962, **32**, 349-54.
4. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transform, भाग I, **मैकग्रहिल न्यूयार्क**
5. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.

6. गुप्ता, के० सी० तथा मित्तल, पी० के०, **जर्न० प्योर ऐण्ड ऐप्लाइड मैथ०** (प्रेषित), 1971.

7. जैन, यू० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस(इंडिया)**, 1968, **38**, 189.

8. लर्च, ई०, **ऐक्यु मैथ०**, 1903, **27**, 339.

9. माइजर, सी० एस०, Proc. Neder. Acad. Wet. 1964, I-VIII, 49.

10. पाठक, आर० एस०, **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा० इंडिया**, 1970, **6**.

11. राकेश, एस० एल०, **मैथ० स्टुडेण्ट**, 1972 (प्रकाशनाधीन)

12. शर्मा, बी० एल०, Annales de la Societe Scientifiqu de Bruxelles, 1975, T. **69**, I, 26, 40.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 1, January, 1975, Pages 27-36

व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी के साथ मिली हुई श्रेणी की हारमोनिक परम संकलनीयता

एल० पी० गौतम
रामपुर बाघेलान, सतना

[प्राप्त—दिसम्बर 30, 1974]

सारांश

हाल ही में दास ने यह प्रतिपादित किया कि प्रत्येक श्रेणी जो कि विधि $\left|N, \frac{1}{(n+1)}\right|$ द्वारा संकलनीय है वही श्रेणी विधि $| R, e^{n^\alpha}, 1 |$ द्वारा भी संकलनीय होगी, परन्तु इसका विपरीत सामान्यतः सही नहीं होता है। प्रस्तुत प्रपत्र में हमने $| R, e^{n^\alpha}, 1 |$ पर की श्रेणी जो व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी के साथ मिली हुई है, $\left|N, \frac{1}{(n+1)}\right|$ संकलनीयता पर सत्यापित किया गया है।

Abstract

On the absolute harmonic summability of a series associated with the derived Fourier series. *By* L. P. Gautam, Rampur Baghelan, Satna.

Das[1] has been recently established that every series summable by the method $\left|N, \frac{1}{(n+1)}\right|$ is also summable by the method $| R, e^{n^\alpha}, 1 |$, but the converse is in general a false. In the present paper we have proved a series associated with the derived Fourier series which is summable $| R, e^{n^\alpha}, 1 |$ is also summable by the method $\left|N, \frac{1}{(n+1)}\right|$.

1. परिभाषा

माना कि $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \to \infty$ जब कि $n \to \infty$ अनन्त श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ को संकलनीय $|R, \lambda_n, 1|$ कहते हैं यदि

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{n+1}}\right\} \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right| < \infty,$$

और अनन्त श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ को संकलनीय $\left|N, \frac{1}{(n+1)}\right|$ कहते हैं यदि

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P_n P_{n-1}} \left|\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{P_n}{k+1} - \frac{P_k}{n+1}\right) a_{n-k}\right| < \infty$$

जब कि

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)} \sim \log n.$$

माना कि

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \qquad \ldots \quad (1 \cdot 1)$$

आवर्ती फलन $f(x)$, जिसका अवर्तकाल 2π है और जो $(-\pi, \pi)$ अन्तराल में लेबेग-समाकलीन है, फूरियर श्रेणी है।

$(1 \cdot 1)$ का अवकलन करने पर निम्न श्रेणी बिन्दु $t=x$ पर प्राप्त होती है

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx) = \sum_{n=1}^{\infty} n B_n(x) \qquad \ldots \quad (1 \cdot 2)$$

इस पूरे शोधपत्र में हम निम्नलिखित संकेतों का प्रयोग करेंगे :

$$\psi(t) = \tfrac{1}{2}\{f(x+t) - f(x-t)\}$$

$$g(t) = \frac{\psi(t)}{t}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} kB_k(x)$$

$$H_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} h(u)\, du \quad (\alpha > 0)$$

$$h_\alpha(t) = \surd\{(\alpha+1)\}\, t^{-\alpha} H_\alpha(t), \quad h_0(t) = h(t) = g(t) \cos \tfrac{1}{2}t$$

$$G_\alpha(t) = \frac{1}{\surd\{(\alpha)\}} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} g(u)\, du \qquad (\alpha > 0)$$

$$g_\alpha(t) = \surd\{(\alpha+1)\}\, t^{-\alpha} G_\alpha(t) \qquad g_0(t) = g(t)$$

$$\chi(t)=\frac{tH_2(t)\cos(t/2)}{(\sin(t/2))^3}$$

$$a'_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \chi(t)\frac{\sin(n-k)t}{(n-k)t}\,dt$$

$F(t)\epsilon Bv(h, k)$ का अर्थ है $F(t)$, (h, k) में सीमित विचरण करने वाला।

2 हाल ही में सिन्हा और सिंह[3] ने निम्नांकित प्रमेय सिद्ध किया है :

प्रमेय S : यदि

(i) $\left\{g(t)\log\frac{k}{t}\right\}(k>e^2\pi),(0, \pi)$ में सीमित विचरण वाला हो और

(ii) $\frac{g(t)}{t}\epsilon L(0, \pi)$

तो श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n-s}{n}$ संकलनीय $|R, e^{n^\alpha}, 1|$ पर है।

यहाँ हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे :

प्रमेय : यदि

(i) $\left\{g(t)\log\frac{k}{t}\right\}(k>e^2\pi)(0, \pi)$ में सीमित विचरण वाला हो और

(ii) $\frac{g(t)}{t}\epsilon L(0, \pi)$

तो श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n-s}{n}$ संकलनीय $\left|N, \frac{1}{(n+1)}\right|$ पर है।

3. प्रमेय की उपपत्ति में हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी :

प्रमेयिका 1

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log\frac{k}{v}}\,dv=O\left\{\frac{(\log n)^{-2}}{(n-k)}\right\}.$$

उपपत्ति : यदि

$$\mathcal{J}=\int_0^\pi \frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log(k/v)}\,dv$$

$$=\left[\left(\log\frac{k}{v}\right)^{-1}\frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})v}{(n-k+\frac{1}{2})}\right]_0^\pi-\frac{1}{(n-k+\frac{1}{2})}\int_0^\pi\left(\log\frac{k}{v}\right)^{-2}\frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})v}{v}\,dv$$

$$= -\frac{1}{(n-k+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\left(\log\frac{k}{v}\right)^{-2}\frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})v}{v}\,dv$$

$$\leqslant \frac{c}{(n-k)}\left(\int_0^{\pi/(n-k)}+\int_{\pi/(n-k)}^{\pi}\right)\left(\log\frac{k}{v}\right)^{-2}\frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})v}{v}\,dv$$

$$= \frac{c}{(n-k)}(\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2),$$ (मान लिया) जहाँ कि C एक नियत अचर है।

चूँकि $\left(0, \frac{\pi}{(n-k)}\right)$ में $\left(\log\frac{k}{n}\right)^{-2}$ आरोही है, तब

$$\mathcal{J}_1 = O(\log(n-k))^{-2}\int_{\eta}^{\pi/(n-k)}\frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})v}{v}\,dv. \quad \left(0<\eta<\frac{\pi}{(n-k)}\right)$$

$$= O(\log(n-k))^{-2},$$

और $\left(\frac{\pi}{(n-k)}, \pi\right)$ में $v^{-1}\left(\log\frac{k}{v}\right)^{-2}$ अवरोही है, तब

$$\mathcal{J}_2 = O\{(n-k)(\log(n-k))^{-2}\}\int_{\pi/(n-k)}^{\xi}\sin(n-k+\tfrac{1}{2})v\,dv$$

$$(\pi/(n-k)<\xi<\pi)$$

$$= O\{(n-k)\{\log(n-k)\}^{-2}\}\frac{1}{(n-k)}$$

$$= O\{\log(n-k)\}^{-2}.$$

इसलिये

$$\mathcal{J} = O\{\log(n-k)\}^{-2}.$$

प्रमेयिका 2[2] : यदि $h(t)\log\frac{k}{t}$ $(0, \pi)$ में सीमित विचरण वाला हो $(k>\pi)$ और $\frac{\psi(t)}{t}$ $\epsilon L(0,\pi)$ तो श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n-s}{n}$ परम अभिसारी होगी।

4. प्रमेय की उपपत्ति :

हमें ज्ञात है कि

$$\frac{s_n-s}{n} = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{d}{dt}\left\{\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin(t/2)}\right\}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin(t/2)}\,dt + \frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin(t/2)}\,dt$$

$$-\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \psi(t)\cot(t/2)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(t)\cos(n+\tfrac{1}{2})t\,dt+\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi g(t)\cos(n+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

$$-\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi g(t)\cot(t/2)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt \qquad \ldots \quad (4\cdot1)$$

अब

$$t_n-t_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{P_k}{P_n}-\frac{P_{k-1}}{P_{n-1}}\right)u_{n-k}$$

$$=\frac{1}{P_n P_{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{P_n}{k+1}-\frac{P_k}{n+1}\right)u_{n-k}$$

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n-s}{n}$ संकलनीय $\left|N,\frac{1}{(n+1)}\right|$ होगी, यदि

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}|t_n-t_{n-1}| \qquad \ldots \quad (4\cdot2)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{P_n P_{n-1}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{P_n}{k+1}-\frac{P_k}{n+1}\right)\frac{s_{n-k}-s}{(n-k)}\right|<\infty.$$

(4·1) का उपयोग करने पर

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n P_{n-1}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{P_n}{k+1}-\frac{P_k}{n+1}\right)\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(t)\cos(n-k+\tfrac{1}{2})t\,dt\right.\right.$$

$$+\frac{1}{(n-k)\pi}\int_0^\pi g(t)\cos(n-k+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

$$\left.\left.-\frac{1}{(n-k)\pi}\int_0^\pi g(t)\cot\tfrac{1}{2}t\sin(n-k+\tfrac{1}{2})t\,dt\right]\right|$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n P_{n-1}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{P_n}{k+1}-\frac{P_k}{n+1}\right)(P_1+P_2+P_3)\right|$$

(मानाकि)

$=I_1+I_2+I_3$, (मानाकि)

P_1 का खंडशः समाकलन करने पर

$$P_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(t)\cos(n-k+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(t)\log\frac{k}{t}\left(\log\frac{k}{t}\right)^{-1}\cos(n-k+\tfrac{1}{2})t\,dt$$

$$=2A\int_0\frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log(k/v)}\,dv-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\left\{g(t)\log\frac{k}{t}\right\}\int_0^t\frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log(k/v)}\,dv$$

जबकि,

$$A=\frac{1}{\pi}\left[g(\pi)\log\frac{k}{\pi}\right].$$

अब,

$$I_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n P_{n-1}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{P_n}{k+1}-\frac{P_k}{n+1}\right)\left[2A\int_0^\pi\frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log(k/v)}\,dv\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\left\{g(t)\log\frac{k}{t}\right\}\int_0^t\frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log(k/t)}\,dv\right]\right|$$

$$=I_{1\cdot 1}+I_{1\cdot 2},\ \text{(माना कि)}$$

प्रमेयिका-1 का उपयोग करने पर

$$I_{1\cdot 1}=2|A|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n P_{n-1}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{P_n}{k+1}-\frac{P_k}{n+1}\right)\int_0^\pi\frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log(k/v)}\,dv\right|$$

$$\leqslant O(1)|A|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n P_{n-1}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{P_n}{k+1}-\frac{P_k}{n+1}\right)\left(\frac{1}{(n-k)(\log(n-k))^2}\right)\right.$$

$$\leqslant O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n P_{n-1}}\left(\sum_{k=0}^{[n/2]-1}+\sum_{[n/2]}^{n-1}\right)\left(\frac{P_n}{k+1}-\frac{P_k}{n+1}\right)\left(\frac{1}{(n-k)(\log(n-k))^2}\right)$$

$$=I_{1\cdot 1\cdot 1}+I_{1\cdot 1\cdot 2},\ \text{(माना कि)}$$

चूँकि $(n+1)P_n\geqslant P_k(n+1)$, तब

$$I_{1\cdot 1\cdot 2}\leqslant O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n P_{n-1}}\sum_{k=[n/2]}^{n-1}\frac{P_n}{k+1}\,\frac{1}{(n-k)(\log(n-k))^2}$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nP_{n-1}(\log n)^2}\sum_{k=[n/2]}^{n-1}\frac{1}{(n-k)}$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$$

$$=O(1).$$

फिर से,

$$I_{1\cdot1\cdot1}=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n P_{n-1}}\sum_{k=0}^{[n/2]-1}\left(\frac{P_n}{k+1}-\frac{P_k}{n+1}\right)\frac{1}{(n-k)(\log(n-k))^2}$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)P_n P_{n-1}(\log n)^2}\sum_{k=0}^{[n/2]-1}\frac{P_n(n+1)-P_k(k+1)}{(k+1)(n-k)}$$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)P_{n-1}(\log n)^2}\sum_{k=0}^{[n/2]-1}\frac{1}{(k+1)}$$

जबकि $P_n-P_k=(1)O$

$$=O(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(\log n)^2}$$

$$=O(1).$$

इसलिये,

$$I_{1\cdot1}=O(1). \qquad \ldots (4\cdot3)$$

समाकलन का क्रम बदलने पर

$$\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}d\left\{g(t)\log\frac{k}{t}\right\}\int_0^t\frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log\frac{k}{v}}dv\right|$$

$$=\frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log\frac{k}{v}}dv\right|\int_v^{\pi}\left|d\left\{g(t)\log\frac{k}{t}\right\}\right|$$

$$=C\left|\int_0^{\pi}\frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log\frac{k}{v}}dv\right|$$

C एक काल्पनिक स्थिरांक है

अत्र

$$I_{1\cdot2}=C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n P_{n-1}}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{P_n}{k+1}-\frac{P_k}{n+1}\right)\int_0^{\pi}\frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log(k/v)}dv\right|$$

प्रमेयिका 1 का प्रयोग करने पर $I_{1\cdot2}$ को $I_{1\cdot1}$ की तरह सिद्ध किया जा सकता है

$$I_{1\cdot2}=O(1). \qquad \ldots (4\cdot4)$$

P_1 की तरह

$$P_2 = \frac{A}{(n-k)} \int_0^\pi \frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log \frac{k}{v}} dv - \frac{1}{\pi(n-k)} \int_0^\pi d\left\{ g(t) \log \frac{k}{t} \right\} \times \int_0^t \frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log \frac{k}{v}} dv$$

तब

$$I_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P_n P_{n-1}} \left| \sum_{k=0}^{n-1}{}' \left(\frac{P_n}{k+1} - \frac{P_k}{n+1} \right) \left[\frac{A}{(n-k)} \int_0^\pi \frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log(k/v)} dv - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\left\{ g(t) \log \frac{k}{t} \right\} \frac{1}{(n-k)} \int_0^t \frac{\cos(n-k+\frac{1}{2})v}{\log \frac{k}{v}} dv \right] \right|$$

यह सरलता से सिद्ध किया जा सकता है कि

$$I_2 = O(1). \qquad \ldots \quad (4\cdot5)$$

अन्त में,

$$P_3 = \frac{1}{\pi(n-k)} \int_0^\pi g(t) \cot\left(\frac{t}{2}\right) \sin(n-k+\tfrac{1}{2})t\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi(n-k)} \int_0^\pi h(t) \frac{\sin(n-k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t} dt$$

जबकि $h(t) = g(t)\cos(t/2)$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(t) \cot\frac{t}{2} \frac{\sin(n-k)t}{(n-k)} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(t) \frac{\cos(n-k)t}{(n-k)} dt$$

$= \alpha_{n-k} + \beta_{n-k}$, माना कि

यदि हम मान लें

$$h_1(t) = \frac{1}{t} \int_0^t h(u)\, du \quad \text{और} \quad H(t) = \int_0^t h(u)\, du$$

यह ज्ञात है कि

$$g(t) \log \frac{k}{t} \in BV(0, \pi)$$

$$\Rightarrow h_1(t) \log \frac{k}{t} \in BV(0, \pi) \qquad \ldots \quad 4\cdot6)$$

α_{n-k} का खंडशः समाकलन करने पर

$$a_{n-k} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\int_0^t h(u)\,du\right) \frac{\cos (n-k)t}{\tan \frac{t}{2}}\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\int_0^t h(u)\,du\right) \frac{\sin (n-k)t}{2(n-k)\sin^2 \frac{t}{2}}\,dt$$

$$= \gamma_{n-k} + \delta_{n-k}, \text{ (माना कि)}$$

अब,

$$\gamma_{n-k} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{t}\left(\int_0^t h(u)\,du\right) \cos (n-k)t\,dt + 0(1)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi h_1(t) \cos (n-k)t\,dt + 0(1)$$

उपर्युक्त फल I_1 को दृष्टि में रखते हुये

श्रेणी $\Sigma\gamma_{n-k}$ संकलनीय $|H, 1|$* है। . . . (4·7)

आगे हम लिखते हैं

$$\delta_{n-k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi h_1(t) \frac{\sin (n-k)t}{(n-k)\sin^2(t/2)}\,dt$$

खण्डशः समाकलन करने पर

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi H_2(t) \frac{\cos (n-k)t}{\sin^2 (t/2)}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi H_2(t) \frac{\sin (n-k)t}{(n-k)\sin^3(t/2)} \cos (t/2)\,dt$$

$$= p_{n-k} + q_{n-k}, \text{ (माना कि)}$$

इसी प्रकार,

$$\frac{H_2(t) \log (k/t)}{\sin^2(t/2)} \in BV(0, \pi)$$

अतः Σp_{n-k} संकलनीय $| H, 1 |$ है। . . . (4·8)

अब

$$q_{n-k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi t \frac{H_2(t)}{\sin^3 (t/2)} \cos (t/2) \frac{\sin (n-k)t}{(n-k)t}\,dt$$

---

* $\left|N, \frac{1}{(n+1)}\right| \sim |H, 1|$

मान लिया कि

$$t_{n-k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \chi(t) \frac{\sin (n-k)t}{(n-k)t} dt$$

प्रमेयिका 2 प्रमाणित करती है, जबकि

$$\frac{\chi(t)}{t} \in L(0, \pi), \text{ तब } \sum_{n=1}^{\infty} | t_{n-k} | < \infty,$$

जिसके द्वारा

श्रेणी Σq_{n-k} संकलनीय $| H, 1 |$ पर है। . . . (4·9)

अब

$$\beta_{n-k}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} h(t) \frac{\cos (n-k)t}{(n-k)} dt$$

चूँकि श्रेणी Σp_{n-k} की $| H, 1 |$ संकलनीयता यह सिद्ध करती है कि श्रेणी $\Sigma \beta_{n-k}$ संकलनीय $|H, 1|$ होगी।

इस प्रकार प्रमेय उपपन्न हो जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० बी० एल० गुप्ता का आभारी है जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में मार्ग दर्शन किया।

निर्देश

1. दास, जी०, **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1969, **19**, 357-384.
2. मोहन्ती, आर० और महापात्र, एस०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1956, **7**, 1049-1053.
3. सिन्हा, एस० आर० और सिंह, वी०, **इंडियन जर्न० मैथ०**, 1971, **13**, 131-137.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 1, January, 1975, Pages, 37-40

सोडियम आर्सेनाइट का प्याज कन्द के जड़-वर्धन पर प्रभाव-III

श्यामसुन्दर पुरोहित तथा सुरेशचन्द्र अमेटा
राजकीय महाविद्यालय, नाथद्वारा

[प्राप्त—अक्टूबर 22, 1973]

सारांश

प्याज कन्द के जड़-वर्धन पर सोडियम आर्सेनाइट की विभिन्न सान्द्रताओं के प्रभाव का अध्ययन अनुकूलतम ताप पर किया गया। जब कन्दों को 25, 50 तथा 75 ppm विलयन में रखा गया तो जड़ वृद्धि रुक गई। 75 ppm के अतिरिक्त समस्त उपचारों से कन्दों में नई जड़ें निकलीं। सर्वाधिक जड़ की लम्बाई अनुपचारित कन्द की रही; फिर 5 ppm विलयन से उपचारित कन्द की।

Abstract

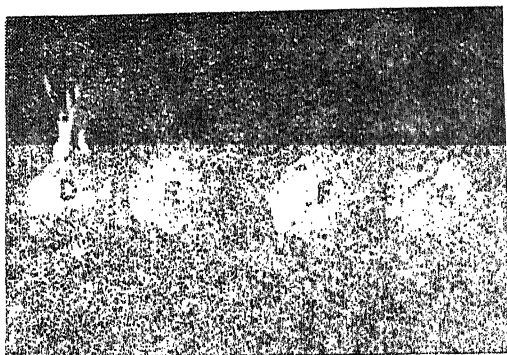
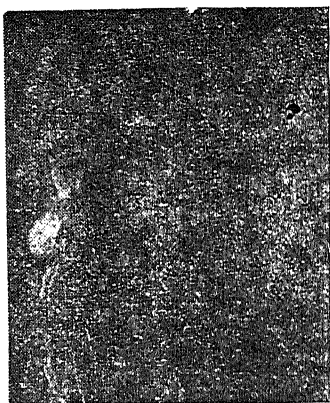
Effect of sodium arsenite on the root growth of *allium cepa* bulb. *By* Shyam Sunder Purohit and Suresh Chander Ameta, Department of Botany and Chemistry, Government College, Nathdwara.

The effect of various concentrations of sodium arsenite on the root growth of *Allium cepa* was studied at optimum temperature (29±2° C.). The root growth was inhibited when the onion bulbs were kept in 25, 50, and 75 ppm solution. It has been observed that new roots appeared in all the treated sets except in 75 ppm solution. The maximum root length was recorded in untreated bulb followed by 5ppm arsenite treated bulb.

विभिन्न रसायनों का प्याज कन्द के जड़-वर्धन पर प्रभाव का अध्ययन विगत वर्षों में समय-समय पर विभिन्न जैवविदों द्वारा किया गया है[1,2,3]। प्रस्तुत पत्र का मुख्य उद्देश्य सोडियम आर्सेनाइट द्वारा जड़-वर्धन पर होने वाले प्रभावों का अध्ययन है। सोडियम आर्सेनाइट का पौधों के विभिन्न भागों पर, विशेषतया तने एवं जड़-वर्धन पर होने वाले प्रभावों पर वांछित साहित्य पर्याप्त मात्रा में उपलब्ध नहीं है। अतः इसी कोण से इस क्षेत्र में उपर्युक्त शोध विषय चुना गया। क्राफ्ट[4], ग्रिमलिमन तथा उसके सहयोगी[5], माल्लाह एवं आनन्द[6], सोमन्ना[7] तथा पुरोहित[8] ने सोडियम आर्सेनाइट के विभिन्न पौधों पर वृद्धि निरोधक, श्वसन-निरोधक, असामान्य सूत्री-विभाजन एवं

पर्ण-मृत्यु का अध्ययन करके परिणाम प्रस्तुत किये। प्रस्तुत अध्ययन में भी सोडियम आर्सेनाइट का प्याज कन्द के जड़-वर्धन पर निरोधक प्रभाव प्रेक्षित किया गया।

प्रयोगात्मक

सोडियम आर्सेनाइट का प्रभाव अनुकूलतम ताप ($29 \pm 2°$ से०) पर जड़ों के भेदीकरण एवं वर्धन पर देखा गया। सोडियम आर्सेनाइट इस अभियोजन के लिए इसलिए चुना गया क्योंकि यह ऐसा विषैला रसायन है जो पौधों के जड़-वर्धन पर निरोधक प्रभाव दर्शाता है। कुछ प्याज कन्दों को सोडियम

सोडियम आर्सेनाइट की विभिन्न सान्द्रताओं का प्याज-कन्द के जड़-वर्धन पर प्रभाव
A = अनुपचारित कन्द, B = 5 ppm, C = 10 ppm, D = 15 ppm, E = 25ppm,
F = 50ppm, G = 75 ppm

आर्सेनाइट की भिन्न-भिन्न सान्द्रताओं (5 ppm, 10 ppm, 15ppm, 25 ppm, 50ppm, 75ppm) में चौड़े मुँह वाले अलग-अलग जारों में जड़-वर्धन के अध्ययन हेतु रखा गया। सोडियम आर्सेनाइट का विलयन साधारण नल के जल में बनाया गया। लगभग एक ही आकार, नाप और तौल के प्याज कन्द जड़-वर्धन अध्ययन के लिए चुने गए। जड़ों की वृद्धि-दर का प्रेक्षण प्याज कन्दों को उपचारित किये जाने के 24 घन्टे बाद आरम्भ किया गया।

परिणाम एवं विवेचना

प्राप्त परिणामों को सारणी 1 में अभिलेखित किया गया है। परिणामों के अनुसार सोडियम आर्सेनाइट से उपचारित प्याज कन्दों में जड़-वर्धन के अध्ययन से ज्ञात होता है कि जड़-वर्धन की दर बढ़ती हुई सान्द्रता के साथ क्रमशः घटती रहती है। 50 ppm सोडियम आर्सेनाइट से जड़ों की अधिकतम लम्बाई 0·1 सेमी० पाई गई, जब कि 75 ppm से उपचारित कन्दों में किसी भी प्रकार की जड़ें नहीं देखी गईं। 5 ppm तथा 10 ppm सान्द्रता वाले विलयनों में सात दिनों पश्चात् उच्चतम जड़-वर्धन क्रमशः 5·5 सेमी०, तथा 4·8 सेमी० प्रेक्षित किया गया जो कि अन्य सान्द्रताओं (15ppm,

सारणी 1

सोडियम आर्सेनाइट की विभिन्न सान्द्रताओं का प्याज कन्द के जड़-वर्धन पर प्रभाव

सोडियम आर्सेनाइट की सान्द्रता, ppm	जड़ों की माध्य लम्बाई, से०मी०						
	दिन						
	1	2	3	4	5	6	7
अनुपचारित	1·2	2·8	5·4	7·0	8·0	8·6	9·2
सोडियम आर्सेनाइट 5ppm	0·8	1·6	2·7	3·5	4·0	4·9	5·5
,, ,, 10 ,,	0·75	1·5	2·6	3·0	3·4	4·5	4·8
,, ,; 15 ,,	0·6	1·1	1·5	1·6	1·7	1·7	1·8
,, ,, 25 ,,	0·4	0·6	0·7	0·8	0·8	0·9	1·1
,, ,, 50 ,,	0·1	0·1	0·1	0·1	0·1	0·1	0·1
,, ,, 75 ,,	कोई वर्धन नहीं।						

25 ppm) से उपचारित कन्दों की जड़ों की की तुलना में सन्तोषजनक थी। अनुपचारित कन्दों की जड़ों की औसत लम्बाई 9·2 सेमी० तक अभिलेखित की गई। अनुपचारित तथा 5ppm और 10ppm से उपचारित जड़ों के रंग में किसी भी प्रकार का भूरापन नहीं देखा गया, लेकिन 15, 25, 50ppm में यह भूरापन बढ़ती हुई सान्द्रता के साथ क्रमशः बढ़ता गया।

माल्लाह एवं डावुड[6] के अनुसार सोडियम आर्सेनाइट **विसिया नारबान्सिस** (*vicia narbonensis*) की जड़ों की सूत्री विभाजन क्रिया पर असामान्य प्रभाव दर्शाता है। सोडियम आर्सेनाइट की 0·01*N* सान्द्रता जड़ों की कोशिकाओं में कोशिका-द्रवी एवं केन्द्रकीय-विन्यास को भी प्रभावित करती है। क्राफ्ट[4] के अनुसार आर्सेनिकीय यौगिकों के अम्लीय विलयन पौधों की पत्तियों की वृद्धि पर पूर्णमृत्यु प्रभाव दर्शाते हैं। इसी प्रकार खोसला[7] ने भी **एकेराइन्थस ऐस्परा** (*Achyranthes aspera*), **कैसिया टोरा** (*Cassia tora*) तथा **रुएलिया ट्यूबरोजा** (*Ruellia tuberosa*) के बीजों के अंकुरण एवं नवोद्भिद के वर्धन पर सोडियम आर्सेनाइट की विभिन्न सान्द्रताओं प्रभाव का अध्ययन किया। उनके परिणामों के अनुसार सोडियम आर्सेनाइट उपर्युक्त पौधों पर अधिक सान्द्रता (20, 25, 50, 75 ppm) में मूलज तथा बीजपत्राधार की वृद्धि पर निरोधक प्रभाव दर्शाते हैं।

पुरोहित[8] ने **केलोट्रोपिस प्रोसेरा** (*Calotropis procera*) के बीज-अंकुरण पर सोडियम आर्सेनाइट की विभिन्न सान्द्रताओं के प्रभाव का अध्ययन किया तथा उससे प्राप्त परिणाम माल्लाह तथा डावुड[6], क्राफ्ट[4] तथा खोसल[7] द्वारा प्राप्त परिणामों के अनुरूप थे। उपर्युक्त सभी परिणामों से यह ज्ञात होता है कि सोडियम आर्सेनाइट सूत्री-विभाजन क्रिया पर निरोधक प्रभाव दर्शाता है। सम्भवतः सोडियम आर्सेनाइट कोशिकाओं में साइटोकायनिन की संश्लेषण क्रिया में प्रयुक्त होने वाले एन्जाइमों एवं उससे सम्बन्धित

अन्य रासायनिक अभिक्रियाओं को प्रभावित कर वृद्धि पर निरोधक प्रभाव दर्शाता है, क्योंकि आर्सेनिकीय यौगिकों के विलयन अम्लीय स्वभाव के होते हैं अतः यह सम्भव है कि अधिक अम्लीय माध्यम कोशिकाओं की साइटोकायेनेसिन क्रिया को प्रभावित कर सूत्री-विभाजन क्रिया में असामान्यता उत्पन्न करता हो।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक श्री गनेश नारायण माथुर, प्राचार्य, राजकीय महाविद्यालय, नाथद्वारा के अत्यन्त आभारी हैं जिन्होंने प्रस्तुत शोध कार्य के साहित्य को उपलब्ध कराने में सहायता की।

निर्देश

1. पुरोहित, श्याम सु० तथा आमेटा, सुरेश च०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका,** 1972, **15,** 189-192.
2. पुरोहित, श्याम सु० तथा आमेटा, सुरेश च०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका जुलाई,** 1973.
3. कस्तूरबाई, ए० पी०, तथा खान, **करेण्ट साइन्स,** 1968, **37,** 111-112.
4. क्राफ्ट, ए० एस०, **हिलगार्डिया,**1933, **7,** 361-372.
5. क्रिसटिनसन, जो० एस०. कुन्ज, एल० जे०-वानर, डब्ल्यू० डी० जूनियर, थिमैन, के० वी०, **प्लान्ट फिजियोलोजी,** 1949, **24,** 178-181.
6. माल्लाह, जी० एस० एवं डावुड, एम० एम०, **ऐलकजैन्ड्रिया जर्न० एग्रि० रिस०,** 1956, **4,** 91-101.
7. खोसला, एस० एन०, **इण्डियन जर्न० वीड साइन्स,** 1971, **III,** 86-91.
8. पुरोहित, श्याम सु० (अप्रकाशित परिणाम)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 1, January, 1975, Pages 41-45

बबूल के पुष्पों के फ्लेवोनाइडों का अध्ययन

एस० के० गुप्ता तथा एम० एम० बोकाड़िया
रसायन विभाग, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—दिसम्बर 1, 1974]

सारांश

बबूल के पुष्पों के निष्कर्ष को ठण्डा करने से स्टियरिक अम्ल प्राप्त किया गया। वर्णलेखी विश्लेषण द्वारा चार फ्लेवोनाइडों की उपस्थिति निश्चित की गयी, इनमें से तीन पदार्थ क्रमशः केम्फेराल -3-ग्लूकोसाइड (I), आइसोक्वेर्सेटिन(II), तथा ल्यूकोसायनेडिन (III) प्रमाणित हुये।

Abstract

Flavonoids from the flowers of *Acacia-arabica*. *By* S. K. Gupta and M. M. Bokadia, School of Studies in Chemistry, Vikram University, Ujjain.

Stearic acid has been obtained on cooling the acetone extract of the flowers of *acacia arabica*. Presence of four phenolic components has been revealed by chromatography of the extract. Three of them have been isolated and characterised as kaempherol-3-glucoside, isoquercetin and leucocyanidin.

अकेशिया-अरेबिका (हिन्दी-बबूल, पंजाबी किक्कर) मायमोसी परिवार का सदस्य है। यह मध्यप्रदेश के जंगलों में बहुतायत में मिलता है। इसकी लकड़ी भवन निर्माण के काम आती है तथा इससे अत्यन्त प्राचीन काल से कत्था प्राप्त किया जाता रहा है। साथ ही इसकी छाल का उपयोग कीटाणुनाशक के रूप में और महीन टहनियों का उपयोग दतौन के लिये किया जाता है।

इसकी छाल से[1] भानु, राजदुराई तथा नायुदम्मा ने क्वेर्सेटिन, (+) केटेकिन, (+) डायकेटेकिन (--) इपिकेटेकिन, (+) ल्युकोसायनेडिन तथा (+) ल्युकोसायनेडिन गेलेट आदि फ्लेवोनाइड प्राप्त किये। इसकी पत्तियों से पालीफिनालिक पदार्थ[2] तथा इसकी फलियों से रोबिनडेन डायाल मिलने का उल्लेख है[3]। इस प्रकार इस पर काफी रोचक कार्य हुआ है, किन्तु इसके पीले-नारंगी पुष्पों के सम्बन्ध में कोई उल्लेख प्राप्त नहीं है। प्रस्तुत शोधपत्र में इस उद्देश्य की पूर्ति हेतु किये गये कार्य का उल्लेख है।

प्रयोगात्मक

ताजे पीले पुष्पों को ऐसीटोन से निष्कर्षित किया, इसे ठण्डा करने से एक चिपचिपा अवक्षेप प्राप्त हुआ। इसे छान कर ईथर से धोया गया। यह पदार्थ रासायनिक अभिक्रियाओं, द्रवणांक, प्रामाणिक नमूने के साथ संयुक्त द्रवणांक और इसके s-बेन्जिल आइसोथायोयूरोनियम व्युत्पन्न द्वारा स्टियरिक अम्ल प्रमाणित हुआ।

स्टियरिक अम्ल पृथक करने के बाद मातृद्रव को अल्पदाब पर सान्द्रित किया गया तथा वर्णलेखी द्वारा इसमें चार फिनालीय पदार्थों की उपस्थिति ज्ञात हुई। इनमें से प्रथम दो के Rf मान 0·72 तथा 0·58 ज्ञात हुये, जबकि शेष दो की उपस्थिति डेनिंग अभिकर्मक (0·5% फेरिक क्लोराइड तथा 0·5% पोटैसियम फेरीसायनाइड विलयन मिश्रण) तथा p-टालिवन सल्फोनिल क्लोराइड के छिड़काव द्वारा ही ज्ञात की जा सकी। विलायक को अल्पदाब पर हटाने से गहरे भूरे रंग का अवशेष प्राप्त हुआ, जिसका क्रिस्टलीकरण सम्भव न हो सका। अतः इसका सिलिका जेल के दण्ड पर प्रभाजन किया गया। एथिल ऐसीटेट प्रभाजों से दो क्रिस्टलीय पदार्थ "अ" तथा "ब" प्राप्त हुये जिनके गलनांक क्रमशः 178—80° तथा 210—220° पाये गये। गुणात्मक विश्लेषण से ये दोनों ग्लाइकोसाइड ज्ञात हुये। इनकें जल अपघटन से प्राप्त शर्करा वर्णलेखी तथा प्रामाणिक नमूने के साथ की गई सह-वर्णलेखी द्वारा ग्लूकोस प्रमाणित हुई तथा 279—80° और 314—16° वाले अग्लाइकोन प्राप्त हुये।

अ तथा ब पदार्थों का डायजोमेथेन के साथ मेथिलीकरण करने से "स" तथा "द" मेथिल ईथर प्राप्त हुये, जिनके द्रवणांक क्रमशः 86° तथा 152—54° पाये गये।

पदार्थ "अ" की पहिचान

पदार्थ "अ" की पहिचान इसके द्रवणांक, *Rf* मान तथा अन्य गुणों के द्वारा केम्फेराल 3-ग्लूकोसाइड के रूप में की गई। इसका केम्फेराल 3-ग्लूकोसाइड होना निम्न आधारों से प्रमाणित हुआ।

1. विश्लेषणात्मक परिणाम :

प्राप्त : C, 56·14; 5·09 केम्फेराल 3-ग्लूकोसाइड। $C_{21}H_{20}O_{11}$ के लिये आवश्यक C, 56·0, H, 4·88%

2. अवरक्त स्पेक्ट्रम : (पोटैशियम ब्रोमाइड में) अवरक्त स्पेक्ट्रम निम्नांकित बैंड प्रदर्शित करता है।

3450 Cm^{-1} (हाइड्राक्सिल समूह के कारण)

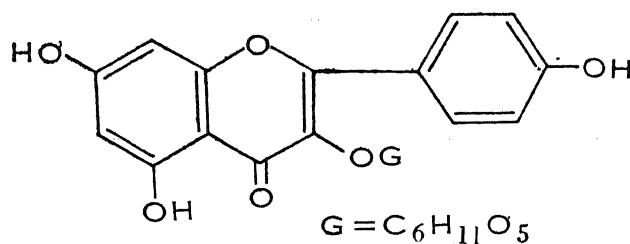
1720 Cm^{-1} (कीटोनी समूह के कारण)

तथा 1040 Cm^{-1} (ईथर बन्ध के कारण)

3. पराबैंगनी स्पेक्ट्रम :

एथिल ऐल्कोहल में अत्यधिक अवशोषण 267, 30 तथा 351 mu पर (फ्लेवोनाल के लिये विशिष्ट अवशोषण) प्राप्त हुये ।

HO, OH, OG, OH, O

$G = C_6H_{11}O_5$

(I) केम्फेरॉल-3-ग्लूकोसाइड

पदार्थ "ब" की पहिचान

पदार्थ ब की पहिचान आइसोक्वेर्सेटिन के रूप में द्रवणांक, Rf मान तथा अन्य गुणों से की गई । इसे इस रूप में निम्न आधारों पर प्रमाणित किया गया ।

1. विश्लेषणात्मक परिणाम : प्राप्त : C; 51·09; H, 4·69 आइसोक्वेर्सेटिन $C_{21}H_{20}O_{11}H_2O$ के लिये आवश्यक C, 51·3; H, 4·65%

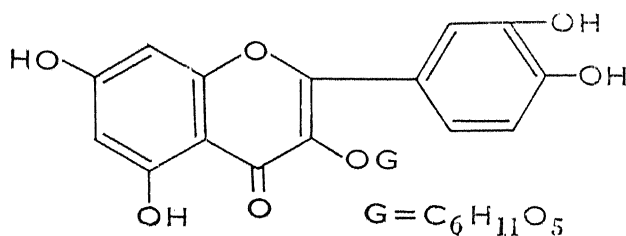
2. अवरक्त स्पेक्ट्रम : यह निम्नांकित बैंड प्रदर्शित करता है :

$3450 Cm^{-1}$ ($-O-H$ समूह के कारण)

तथा $1720 Cm^{-1}$ ($>C=0$ समूह के कारण)

3. पराबैंगनी स्पेक्ट्रम : एथिल ऐल्कोहल में अत्यधिक अवशोषण 255, 355 तथा 360 mu (फ्लेवोनाल के विशिष्ट मान) पर प्राप्त हुये ।

HO, OH, OH, OG, OH, O

$G = C_6H_{11}O_5$

(II) आइसोक्वेर्सेटिन

पदार्थ "स" की पहिचान

इसे केम्फेराल 3-ग्लकोसाइड का ट्राइमेथिल ईथर निम्न तथ्यों के आधार पर प्रमाणित किया गया ।

1. विश्लेषणात्मक परिणाम : प्राप्त: C, 58·01; H, 6·34; $C_{24}H_{26}O_{12}$ के लिए आवश्यक C, 57·1; H 5·36%

2. अवरक्त स्पेक्ट्रम : यह निम्न बैंड प्रदर्शित करता है।

2950, 1720 (>C=0 समूह के कारण), 1580, 1405, 1440 तथा 1210 Cm^{-1}

पदार्थ "द" की पहिचान

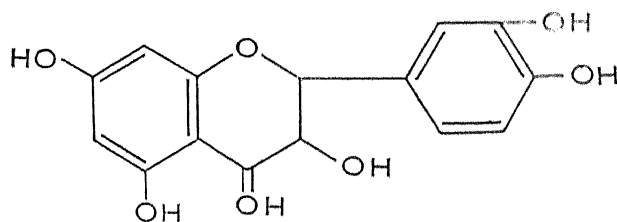
इसे आइसोक्वेसेटिन टेट्रामेथिल ईथर के रूप में निम्न तथ्यों के आधार पर प्रमाणित किया गया।

1. विश्लेषणात्मक परिणाम : प्राप्त : C, 58·16; H, 5·31; $C_{25}H_{26}O_{13}$ के लिये आवश्यक C, 57·6; H, 3·5%

2. अवरक्त स्पेक्ट्रम : यह निम्न बैंड प्रदर्शित करता है।

3110, 1670, 1600, 1500, 1490, 1470, 1360, 1300, 1256 तथा 1145Cm^{-1} पर बैंड प्रदर्शित करता है।

ल्यूकोसायनेडिन की पहिचान

मूल निष्कर्ष को 10% मेथेनॉलीय हाइड्रोक्लोराइड के साथ 60° पर 15 मिनिट तक अभिकृत करने से गहरे लाल रंग का ऐन्थोसायनेडिन प्राप्त हुआ। शुद्धिकरण के पश्चात् यह 542 nm पर अत्यधिक अवशोषण प्रदर्शित करता है। इसकी वर्णलेखी विलायक नियामक (1) एसीटिक अम्ल, सान्द्र हाइड्रोक्लोरिक अम्ल जल 30 : 3 :10 v/v तथा (2) द्वितीय एक विलायक नियामक (एसीटिक अम्ल, हाइड्रोक्लोरिक अम्ल जल 5 : 1 : 15 v/v द्वारा केवल एक पदार्थ की उपस्थिति प्रदर्शित होती है। इन विलायक नियामकों में इसका Rf मान क्रमश: 0·5 तथा 0·32 प्राप्त हुआ। ऐन्थोसायनेडिन का Rf मान सायनेडिन के समान ही प्राप्त हुआ। अतः वर्णलेखी का तीसरा पदार्थ ल्यूकोसायनेडिन (III) है।

(III) ल्यूकोसायनेडिन

चौथा पदार्थ अत्यल्प मात्रा में होने के कारण इसका विस्तृत अध्ययन नहीं किया जा सका, किन्तु कार्य प्रगति पर है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग, नई दिल्ली का शोध छात्रवृति प्रदान करने हेतु आभारी है।

निर्देश

1. भानु, के० यू०, राजदुराई, एस० तथा नायुदम्मा, वाई०, **आस्ट्रेलियन जर्न० केमि०**, 1964, **17**, 803-809.
2. इन्द्रेस, एच० तथा हिलल, एम०, **जर्न० फायटोकेमि०**, 1962, **2**, 151-56.
3. भानु तथा सहयोगी, **बुले०सेन्ट्रल लेदर रिसर्च इन्स्टीट्यूट**, 1962, **9**, 100.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No 1, January, 1975, Pages 47-55

दो चरों वाले H-फलन के कतिपय प्रसार सूत्र

एन० एस० होरा
गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय ,रतलाम

[प्राप्त—फरवरी 21, 1973]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में दो चरों वाले कतिपय समाकलों का मूल्यांकन किया गया है और इनका उपयोग दो चरों वाले H-फलन के प्रसार सूत्रों को स्थापित करने के लिये हुआ है। दो चरों वाले G-फलन के कुछ ज्ञात फल विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

Some expansion formulae for H-function of two variables. *By* N. S. Hora, Department of Mathematics, Government College, Ratlam.

In this paper we have evaluated some integrals involving H-function of two variables and employed them to establish some expansion formulae for the H-function of two variables. Some known results for G-function of two variables have been obtained as particular cases.

मुनोट तथा कल्ला[5] द्वारा परिभाषित दो चरों वाले H-फलन को गुलाटी[3] ने निम्नलिखित रूप में अंकित किया है :

$$H_{(p_1,\, p_2),\, p_3;\, (q_1,\, q_2),\, q_3}^{(m_1,\, m_2);\, (n_1,\, n_2),\, n_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})];\, [(c_{p_2}, C_{p_2})];\, [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})];\, [(d_{q_2}, D_{q_2})];\, [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-B_js)\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+A_js)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-D_jt)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+C_jt)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+B_js)\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-A_js)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+D_jt)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-C_jt)}$$

$$\times \frac{\prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1-e_j+E_js+E_jt)\, y^s z^t}{\prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j-E_js-E_jt) \prod_{j=1}^{q_3} \Gamma(1-f_j+F_js+F_jt)}\, ds\, dt \qquad (1\cdot1)$$

L_1 तथा L_2 बार्नीज प्रकार के उपयुक्त कंटूर हैं। इनमें से L_1 इस प्रकार से s-तल में स्थित है कि $\Gamma(b_j-B_js)$, $j=1, \ldots, m_1$ के पोल कंटूर के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-a_j+A_js)$, $j=1, \ldots, n_1$ और $\Gamma(1-e_j+E_js+E_jt)$, $j=1, \ldots, n_3$ के बाईं ओर पड़े। कंटूर L_2 t-तल में स्थित है जिससे कि $\Gamma(d_j-D_jt)$, $j=1, \ldots, m_2$ के पोल कंटूर के दाईं ओर तथा $\Gamma(1-c_j+C_jt)$, $j=1, \ldots, n_2$ और $\Gamma(1-e_j+E_js+E_jt)$, $j=1, \ldots, n_3$ के पोल बाईं ओर पड़ें।

$$0 \leqslant m_1 \leqslant q_1,\ 0 \leqslant m_2 \leqslant q_2,\ 0 \leqslant n_1 \leqslant p_1,\ 0 \leqslant n_2 \leqslant p_2,\ 0 \leqslant n_3 \leqslant p_3$$

द्विगुण समाकल अभिसारी होता है यदि

$$\sum_{j=1}^{p_1} A_j + \sum_{j=1}^{p_3} E_j - \sum_{j=1}^{q_1} B_j - \sum_{j=1}^{q_3} F_j < 0,\ \sum_{j=1}^{p_2} C_j + \sum_{j=1}^{p_3} E_j - \sum_{j=1}^{q_2} D_j - \sum_{j=1}^{q_3} F_j < 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} A_j - \sum_{j=n_1+1}^{p_1} A_j + \sum_{j=1}^{n_3} E_j - \sum_{j=n_3+1}^{p_3} E_j + \sum_{j=1}^{m_1} B_j - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} B_j - \sum_{j=1}^{q_3} F_j \equiv \alpha > 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n_2} C_j - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} C_j + \sum_{j=1}^{n_3} E_j - \sum_{j=n_3+1}^{p_3} E_j + \sum_{j=1}^{m_2} D_j - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} D_j - \sum_{j=1}^{q_3} F_j \equiv \beta > 0,$$

तथा $|\arg y| < \frac{1}{2}\alpha\pi$, $|\arg z| < \frac{1}{2}\beta\pi$

यहाँ पर और इससे आगे $[(a_p, A_p)]$ से प्राचलों के सेट $(a_1, A_1), (a_2, A_2), \ldots, (a_p, A_p)$ का प्रतिनिधित्व होता है। संकेत (a_p) $a_1, \ldots, a_p$ के लिये आया है। बड़े अक्षर धन पूर्णांक के द्योतक हैं।

आगे सवत्र (1·1) के दायें पक्ष को $H\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$ से प्रदर्शित किया जावेगा और यही दो चरों वाला वांछित H-फलन है।

2. इस अनुभाग में निम्नांकित समाकल स्थापित किये गये हैं :

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-1} P_\nu^\mu(x)\, H^{(m_1, m_2);\, (n_1, n_2),\, n_3}_{(p_1, p_2),\, p_3;\, (q_1, q_2),\, q_3} \left[\begin{matrix} y(1-x^2)^\delta \\ z \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})];\ [(c_{p_2}, C_{p_2})];\ [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})];\ [(d_{q_2}, D_{q_2})];\ [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix} \right] dx$$

$$= \frac{\pi 2^{\mu}}{\Gamma\left(\frac{2-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)} H^{(m_1, m_2); (n_1+2, n_2), n_3}_{(p_1+2, p_2), p_3; (q_1+2, q_2), q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} (1-\lambda+\frac{1}{2}\mu, \delta), (1-\lambda-\frac{1}{2}\mu, \delta), [(a_{p_1}, A_{p_1})]; [c_{p_2}, C_{p_2})]; [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})], (-\lambda-\frac{1}{2}\nu, \delta), (1-\lambda+\frac{1}{2}\nu, \delta); [(d_{q_2}, D_{q_2})]; [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right] \quad (2\cdot1)$$

जहाँ $2Re\left(\lambda+\delta\frac{b_j}{B_j}\right)>|Re\mu|,\ j=1, \ldots, m_1$

मान्यता के अन्य प्रतिबन्ध (1·1) की ही भाँति हैं।

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-1}\ P_{\nu}^{\mu}(x)\ H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1, q_2), q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z(1-x^2)^{\delta} \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})]; [(c_{p_2}, C_{p_2})]; [(e_{p_3}, F_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})]; [(d_{q_2}, D_{q_2})]; [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right] dx$$

$$= \frac{\pi 2^{\mu}}{\Gamma\left(\frac{2-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)} H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2+2), n_3}_{(p_1, p_2+2), p_3; (q_1, q_2+2), q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})]; (1-\lambda+\frac{1}{2}\mu, \delta), (1-\lambda-\frac{1}{2}\mu, \delta), [(c_{p_2}, C_{p_2})], [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})]; [(d_{q_2}, D_{q_2})], (-\lambda-\frac{1}{2}\nu, \delta), (1-\lambda+\frac{1}{2}\nu, \delta); [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right] (2\cdot2)$$

जहाँ $2Re\left(\lambda+\delta\frac{d_j}{D_j}\right)>|Re\ \mu|,\ j=1, \ldots, m_2$

मान्यता के अन्य प्रतिबन्ध (1·1) की ही भाति हैं।

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-1}P_{\nu}^{\mu}(x)H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1, q_2), q_3}\left[\begin{matrix} y(1-x^2)^{\delta} \\ z(1-x^2)^{\delta} \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} [(a_p, A_{p_1})]; [(c_{p_2}, C_{p_2})]; [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_{11}}, B_{q_1})]; [(d_{q_2}, D_{q_2})]; [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right] dx$$

$$= \frac{\pi 2^{\mu}}{\Gamma\left(\frac{2-\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)} H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2); n_3+2}_{(p_1, p_2), p_3+2; (q_1, q_2), q_3+2}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})]; [(c_{p_2}, C_{p_2})]; [(1-\lambda-\frac{1}{2}\mu, \delta)(1-\lambda-\frac{1}{2}\mu, \delta), [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})]; [(d_{q_2}, D_{q_2})]; [(f_{q_3}, F_{q_3})], (-\lambda-\frac{1}{2}\nu, \delta), (1-\lambda+\frac{1}{2}\nu, \delta) \end{matrix}\right] \quad (2\cdot3)$$

जहाँ $2Re\left(\lambda+\delta\frac{b_j}{B_j}+\delta\frac{d_j}{D_j}\right)>|Re\ \mu|,\ j=1, \ldots, m_1;\ i=1, \ldots, m_2$

मान्यता के अन्य प्रतिबन्ध (1·1) की ही भाँति हैं।

उपपत्ति

(2·1) को सिद्ध करने के लिये हम (1·1) के बाईं ओर को H-फलन के रूप में व्यक्त करते हैं और समाकलन के क्रम को स्थानान्तरित करते हैं क्योंकि इस प्रक्रम में सन्निहित समाकल अभिसारी हैं अतः द ला पूसा के प्रमेय के अनुसार [1, p. 504] यह मान्य है तो हमें

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma(b_j-B_js)\prod_{j=1}^{n_1}\Gamma(1-a_j+A_js)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-D_jt)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+C_jt)}{\prod_{j=m_1+1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+B_js)\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-A_js)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+D_jt)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-C_jt)}$$

$$\times\frac{\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_js+E_jt)\,y^s\,z^t}{\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-E_js-E_jt)\prod_{j=1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+F_js+F_jt)}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda+\delta s-1}P_\nu^\mu(x)\,dx\,ds\,d$$

प्राप्त होता है। अब [2, p. 316(16)] तथा (1·1) को प्रयुक्त करने पर समाकल (2·1) स्थापित हो जाता है। इसी प्रकार समाकल (2·2) तथा (2·3) भी सिद्ध किये जा सकते हैं।

3. इस अनुभाग में जिन प्रसार सूत्रों की स्थापना की जाती है वे हैं

$$(1-x^2)^{\lambda-1}H^{(m_1,\,m_2);\,(n_1,\,n_2),\,n_3}_{(p_1,\,p_2),\,p_3;\,(q_1,\,q_2),\,q_3}\left[\begin{matrix}y(1-x)^\delta\\ z\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[(a_{p_1},A_{p_1})];\,[(c_{p_2},C_{p_2})];\,[(e_{p_3},E_{p_3})]\\ [(b_{q_1},B_{q_1})];\,[(d_{q_2},D_{q_2})];\,[(f_{q_3},F_{q_3})]\end{matrix}\right]$$

$$=\pi 2^{\mu-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r-\mu)!\,(2r+1)}{(r+\mu)!\,\Gamma\left(\frac{2-\mu+r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-r}{2}\right)}P_\nu^\mu(x)H^{(m_1,\,m_2);\,(n_1+2,\,n_2),\,n_3}_{(p_1+2,\,p_2),\,p_3;\,(q_1+2,\,q_2),\,q_3}\left[\begin{matrix}y\\ z\end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix}(1-\lambda+\tfrac{1}{2}\mu,\delta),\,(1-\lambda-\tfrac{1}{2}\mu,\delta),\,[(a_{p_1},A_{p_1})];\,[(c_{p_2},C_{p_2})];\,[(e_{p_3},E_{p_3})]\\ [(b_{q_1},B_{q_1})],\,(-\lambda-\tfrac{1}{2}r,\delta),\,(1-\lambda+\tfrac{1}{2}r,\delta);\,[(d_{q_2},D_{q_2})];\,[(f_{q_3},F_{q_3})]\end{matrix}\right] \tag{3·1}$$

मान्यता के प्रतिबन्ध वही हैं जो (2·1) के हैं।

$$(1-x^2)^{\lambda-1}H^{(m_1,\,m_2);\,(n_1,n_2),\,n_3}_{(p_1,\,p_2),\,p_3;\,(q_1,\,q_2),\,q_3}\left[\begin{matrix}y\\ z(1-x^2)^\delta\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[(a_{p_1},A_{p_1})];\,[(c_{p_2},C_{p_2})]\,[(e_{p_3},E_{p_3})].\\ [(b_{q_1},B_{q_1})];\,[(d_{q_2},D_{q_2})];[(f_{q_3},F_{q_3})]\end{matrix}\right]$$

$$=\pi 2^{\mu-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r-\mu)!\,(2r+1)}{(r+\mu)!\,\Gamma\left(\frac{2-\mu+r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-r}{2}\right)} P_{\nu}^{\mu}(x)\, H^{(m_1,m_2);(n_1,\, n_2+2),\, n_3}_{(p_1,p_2+2),\, p_3;\,(q_1,q_2+2),\, q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} [(a_{p_1},A_{p_1})];\,(1-\lambda+\tfrac{1}{2}\mu,\,\delta),\,(1-\lambda-\tfrac{1}{2}\mu,\,\delta),\,[(c_{p_2},\,C_{p_2})];\,[(e_{p_3},\,E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}\,B_{c_1})];\,[(d_{q_2},\,D_{q_2})],\,(-\lambda-\tfrac{1}{2}r,\,\delta),\,(1-\lambda+\tfrac{1}{2}r,\,\delta);\,[(f_{q_3},\,F_{p_3})] \end{matrix}\right] \quad (3\cdot2)$$

मान्यता के प्रतिबन्ध (2·2) के ही समान हैं।

$$(1-x^2)^{\lambda-1} H^{(m_1,\, m_2);(n_1,\, n_2),\, n_3}_{(p_1,\, p_2),\, p_3;\,(q_1,\, q_2),\, q_3}\left[\begin{matrix} y(1-x^2)^{\delta} \\ z(1-x^2)^{\delta} \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} [(a_{p_1},\,A_{p_1})];[(c_{p_2},\,C_{p_3})];[(e_{p_3},\,E_{p_3})] \\ [(b_{q_1},\,B_{q_1})];[(d_{q_2},\,D_{q_2})];[(f_{q_3},\,F_{q_3})] \end{matrix}\right]$$

$$=\pi 2^{\mu-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r-\mu)!\,(2r+1)}{(r+\mu)!\;\Gamma\left(\frac{2-\mu+r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-r}{2}\right)} P_{\nu}^{\mu}(x) H^{(m_1,\, m_2);\,(n_1,\, n_2),\, n_3+2}_{(p_1,\, p_2),\, p_3+2;\,(q_1,\, q_2),\, q_3+2}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} [(a_{p_1},\,A_{p_1})];\,[(c_{p_2},\,C_{p_2})];(1-\lambda+\tfrac{1}{2}\mu,\,\delta),\,(1-\lambda-\tfrac{1}{2}\mu,\,\delta),\,[(e_{p_3},\,E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}.\,B_{c_1})];\,[(d_{q_2},\,D_{q_2})];\,[(f_{q_3},\,F_{q_3})],\,(-\lambda-\tfrac{1}{2}r,\,\delta),\,(1-\lambda+\tfrac{1}{2}r,\,\delta) \end{matrix}\right] \quad (3\cdot3)$$

मान्यता के प्रतिबन्ध (2·3) की ही भाँति हैं।

$$(1-x^2)^{\lambda} H^{(m_1,\, n_2);\,(n_1,\, n_2),\, n_3}_{(p_1,\, p_2),\, p_3,\,(q_1,\, q_2),\, q_3}\left[\begin{matrix} y(1-x^2)^{\delta} \\ z \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} [(a_{p_1},\,A_{p_1})];\,[(c_{p_2},\,C_{p_2})];\,[(e_{p_3},\,E_{p_3})] \\ [(b_{q_1},\,B_{q_1})];\,[(d_{q_2},\,D_{q_2})];\,[(f_{q_3},\,F_{q_3})] \end{matrix}\right]$$

$$=\pi \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r2^r(\nu-r)!}{(\nu+r)!\,\Gamma\left(\frac{2-r+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r-\nu}{2}\right)} P_{\nu}^{r}(x)\, H^{(m_1,\, m_2);\,(n_1+2,\, n_2),\, n_3}_{(p_1+2),\, p_2,\, p_3;(q_1+2,\, q_2),\, q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} (1-\lambda+\tfrac{1}{2}r,\,\delta),\,(1-\lambda-\tfrac{1}{2}r,\,\delta),\,[(a_{p_1},\,A_{p_1})];\,[(c_{p_2},\,C_{p_2})],\,[(e_{p_3},\,E_{p_3})] \\ [b_{q_1},\,B_{q_1})],\,(-\lambda-\tfrac{1}{2}\nu,\,\delta),\,(1-\lambda+\tfrac{1}{2}\nu,\,\delta);\,[(d_{c_2},\,D_{q_2})];\,[(f_{q_3},\,F_{q_3})] \end{matrix}\right] \quad (3\cdot4)$$

मान्यता के प्रतिबन्ध (2·1) की भाँति हैं।

$$(1-x^2)^{\lambda} H^{(m_1,\, m_2);\,(r_1,\, n_2),\, n_3}_{(p_1,\, p_2),\, p_3;\,(q_1,\, q_2),\, q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z(1-x^2)^{\delta} \end{matrix}\right|\left.\begin{matrix} [(a_{p_1},\,A_{p_1})];\,[(c_{p_2},\,C_{p_2})];\,[(e_{p_3},\,E_{p_3} \\ [(b_{q_1}B_{q_1})];\,[(d_{q_2},\,D_{q_2})];\,[(f_{q_3},\,F_{q_3})] \end{matrix}\right]$$

$$=\pi \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r\,2^r(\nu-r)!}{(\nu+r)!\,\Gamma\left(\frac{2-r+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r-\nu}{2}\right)} P_{\nu}^{\mu}(x)\, H^{(m_1,\, m_2);\,(n_1,n_2+2),\, n_3}_{(p_1,\, p_2+2),\, p_3;\,(q_1,\, q_2+2),\, q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} [(a_{p_1},\,A_{p_1})];\,(1-\lambda+\tfrac{1}{2}r,\,\delta),\,(1-\lambda-\tfrac{1}{2}r,\,\delta),\,[(c_{p_2},\,C_{p_2})];\,[(e_{p_3},\,E_{p_3})] \\ [b_{q_1},\,B_{q_1})]:\,[(d_{q_2},\,D_{q_2})],\,(-\lambda-\tfrac{1}{2}\nu,\,\delta),\,(1-\lambda+\tfrac{1}{2}\nu,\,\delta);\,[(f_{q_3},\,F_{q_3})] \end{matrix}\right] \quad (3\cdot5)$$

मान्यता के प्रतिबन्ध (2·2) की ही तरह हैं।

$$(1-x^2)^{\lambda} H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1, q_2), q_3}\left[\begin{matrix} y(1-x^2)^{\delta} \\ z(1-x^2)^{\delta} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})]; [(c_{p_2}, C_{p_2})]; [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})]; [(d_{q_2}, D_{q_2})]; [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right]$$

$$=\pi \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r\, 2^r (\nu-r)!}{(\nu+r)!\; \Gamma\left(\frac{2-r+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-r+\nu}{2}\right)} P^r_{\nu}(x)\; H^{(m_1, m_2), (n_1, n_2), n_3+2}_{(p_1, p_2), p_3+2; (q_1, q_2), q_3+2}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_2})]; [(e_{p_2}, C_{p_2})]; (1-\lambda+\tfrac{1}{2}r, \delta), (1-\lambda-\tfrac{1}{2}r, \delta); [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})]; [(d_{q_2}, D_{q_2})]; [(f_{q_3}, F_{q_3})]; (-\lambda-\tfrac{1}{2}\nu, \delta), (1-\lambda+\tfrac{1}{2}\nu, \delta)] \end{matrix}\right] \qquad (3\cdot6)$$

मान्यता के प्रतिबन्ध (2·3) की ही भाँति हैं।

उपपत्ति :

(3·1) को सिद्ध करने के लिये माना कि

$$f(x)=(1-x^2)^{\lambda-1}\; H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_3; (q_1, q_2), q_3}\left[\begin{matrix} y(1-x^2)^{\delta} \\ z \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})]; [(c_{p_2}, C_{p_2})]; [(e_{p_3}, E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})]; [(d_{q_2}, D_{q_2})]; [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} C_r P^{\mu}_{\nu}(x) \qquad -1<x<1 \qquad (3\cdot7)$$

समीकरण (3·7) मान्य है क्योंकि $f(x)$ संतत है और मुक्त अन्तराल $(-1, 1)$ में परिबद्ध विचरण वाला है।

(3·7) में दोनों पक्षों $P^{\mu}_{\nu}(x)$ से गुणा करने पर तथा x के प्रति -1 से 1 तक समाकलित करने पर हमें निम्नांकित प्राप्त होता है

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-1}\; P^{\mu}_{\nu}(x)\; H^{(m_1, m_2); (n_1, n_2), n_3}_{(p_1, p_2), p_2; (q_1, q_2), q_3}\left[\begin{matrix} y(1-x^2)^{\delta} \\ z \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} [(a_{p_1}, A_{p_1})]; [c_{p_2}, C_{p_2})]; [(e_{p_3}; E_{p_3})] \\ [(b_{q_1}, B_{q_1})]; [(d_{q_2}, D_{q_2})]; [(f_{q_3}, F_{q_3})] \end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} C_r \int_{-1}^{1} P^{\mu}_{\nu}(x)\, P^{\mu}_{\nu}(x)\, dx$$

अब (2·1) तथा लेगेन्ड्र बहुपदियों के लाम्बिकता गुण [(6 p. 324 (15·15)] को अर्थात्

$$\int_{-1}^{1} P^{\mu}_{\nu}(x)\; P^{\mu}_{\nu}(x)\; dx=0, \quad r\neq\nu$$

$$=\frac{2(r+\mu)!}{(2r+1)(r-\mu)} \text{ यदि } r=\nu$$

को प्रयुक्त करने पर

$$C_r = \frac{(r-\mu)!\left(\frac{2r+1}{2}\right)2^{\mu}}{(r+\mu)!\,\Gamma\left(\frac{2-\mu+r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-r}{2}\right)} H^{(m_1,\ m_2);\ (n_1+2,\ n_2),\ n_3}_{(p_1+2,\ p_2)p_3;\ (q_1+2,\ q_2),\ q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right|$$

$$\left.\begin{matrix} (1-\lambda-\frac{1}{2}\mu,\ \delta),\ (1-\lambda+\frac{1}{2}\mu,\ \delta)\ [(a_{p_1},\ A_{p_1})];\ [c_{p_2},\ C_{p_2})];\ [(e_{p_3},\ E_{p_3})] \\ [(b_{q_1},\ B_{q_1})],\ (-\lambda-\frac{1}{2}r,\ \delta),\ (1-\lambda+\frac{1}{2}r,\ \delta);\ [(d_{q_2},\ D_{q_2})];\ [(f_{q_3},\ F_{q_3})] \end{matrix}\right] \qquad (3\cdot8)$$

(3·7) तथा (3·8) से प्रसार से (3·1) सिद्ध होता है। इसी प्रकार (3·2) तथा (3·3) को क्रमशः [6, p. 324(15·15)] तथा (2·2) तथा (2·3) प्रयुक्त करके सिद्ध किया जा सकता है।

(ii) को सिद्ध करने के लिये माना कि

$$f(x) = (1-x^2)^{\lambda}\ H^{(m_1,\ m_2);\ (n_1,\ n_2),\ n_3}_{(p_1,\ p_2),\ p_3;\ (q_1,\ q_2),\ q_3}\left[\begin{matrix} y(1-x^2)^{\delta} \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} [(a_{p_1},\ A_{p_1})];\ [(c_{p_2},\ C_{p_2})];\ [(e_{p_3},\ E_{p_3})] \\ [(b_{q_1},\ B_{q_1})];[(d_{q_2},\ D_{q_2})];\ [(f_{q_3},\ F_{q_3})] \end{matrix}\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} C_r\, P_{\nu}^{r}\ (x) \qquad (3\cdot9)$$

(3·9) मान्य है क्योंकि $f(x)$ मुक्त अन्तराल $(-1,\ 1)$ में संतत तथा परिबद्ध विचरण वाला है।

(3·9) में दोनों पक्षों में P_{ν}^{μ} से गुणा करने पर, -1 से 1 तक x के प्रति समाकलित करने पर लेगेन्ड्र बहुपदी के लाम्बिकता गुण [2, p. 279 (30, 31)] अर्थात्

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1}\ P_{\nu}^{r}(x)\ P_{\nu}^{\mu}\ (x)\ dx = 0, \quad \text{यदि}\ r \neq \mu$$

$$= \frac{(\nu+r)!}{r(\nu-r)!}, \quad \text{यदि}\ r = \mu$$

तथा (2·1) का उपयोग करने पर प्रसार (3·4) सिद्ध होता है। इसी प्रकार (3·5) तथा (3 6) को क्रमशः (2·2) और (2·3) प्रयुक्त करके सिद्ध किया जाता है।

4. विशिष्ट दशायें

$\delta = 1$ रखने पर तथा दो चरों वाले H-फलन को गुलाटी[3] द्वारा दिये गये सूत्र अर्थात्

$$H^{(1,1);\ (m,m),\ l}_{(m,\ m),\ l;\ (p+1,\ p+1),\ n}\left[\begin{matrix} -y \\ \\ -z \\ \end{matrix}\middle| \begin{matrix} (1-b_1,\ 1),\ \ldots,\ (1-b_m,\ 1);\ (1-c_1,\ 1),\ \ldots,\ (1-c_m,\ 1); \\ (1-a_1,\ 1),\ \ldots,\ (1-a_l,\ 1) \\ (0,\ 1),\ (1-e_1,\ 1),\ \ldots,\ (1-e_p,\ 1);\ (0,\ 1), \\ (1-f_1,\ 1),\ \ldots,\ (1-f_p,\ 1);\ (1-d_1,\ 1),\ \ldots,\ (1-d_n,\ 1) \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{l} \Gamma a_j \prod_{j=1}^{m} \Gamma b_j \prod_{j=1}^{m} \Gamma c_j}{\prod_{j=1}^{n} \Gamma d_j \prod_{j=1}^{p} \Gamma e_j \prod_{j=1}^{p} \Gamma f_j} F \left[\begin{array}{c|l} l & a_1, \ldots, a_l \\ m & b_1, c_1, \ldots, b_m, c_m \\ n & d_1, \ldots, d_n \\ p & e_1, f_1, \ldots, e_p, f_p \end{array} \middle| y, z \right]$$

की सहायता से कैम्प द फेरी फलन में समानीत करने पर हमें (3·3) तथा (3·6) से क्रमशः (4·1) तथा (4·2) प्राप्त होते हैं :

$$(1-x^2)^{\lambda-1} F \left[\begin{array}{c|l} l & a_1, \ldots, a_l \\ m & b_1, c_1, \ldots, b_m, c_m \\ n & d_1, \ldots, d_n \\ p & e_1, f_1, \ldots, e_p, f_p \end{array} \middle| \begin{array}{l} y(1-x^2) \\ \\ z(1-x^2) \end{array} \right]$$

$$= \pi 2^{\mu-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r-\mu)!\,(2r+1)\Gamma(\lambda+\frac{1}{2}\mu)\Gamma(\lambda-\frac{1}{2}\mu)}{(r+\mu)!\,\Gamma\left(\frac{2-\mu+r}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\mu-r}{2}\right)\Gamma(1+\lambda+\frac{1}{2}r)\Gamma(\lambda-\frac{1}{2}r)}$$

$$\times P_{\nu}^{\mu}(x) F \left[\begin{array}{c|l} l+2 & \lambda+\frac{1}{2}\mu, \lambda-\frac{1}{2}\mu, a_1, \ldots, a_l \\ m & b_1, c_1, \ldots, b_m, c_m \\ n+2 & d_1, \ldots, d_n, 1+\lambda+\frac{1}{2}r, \lambda-\frac{1}{2}r \\ p & e_1, f_1 \ldots, e_p, f_p \end{array} \middle| y, z \right] \qquad (4\cdot1)$$

जहाँ $2Re\,\lambda > |Re\,\mu|$; $p+n<l+m+1$, $|\arg y| < \frac{1}{2}(l+m+1-p-n)\pi$; $|\arg z| < \frac{1}{2}(l+m+1-p-n)\pi$

$$(1-x^2)^{\lambda} F \left[\begin{array}{c|l} l & a_1, \ldots, a_l \\ m & b_1, c_1, \ldots, b_m, c_m \\ n & d_1, \ldots, d_n \\ p & e_1, f_1, \ldots, e_p, f_p \end{array} \middle| y(1-x^2), z(1-x^2) \right]$$

$$= \pi \sum_{r=0}^{\infty} \frac{r 2^r (\nu-r)!\,\Gamma(\lambda+\frac{1}{2}r)\Gamma(\lambda-\frac{1}{2}r)}{(\nu+r)!\,\Gamma\left(\frac{2-r+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-r-\nu}{2}\right)\Gamma(1+\lambda+\frac{1}{2}\nu)\Gamma(\lambda-\frac{1}{2}\nu)}$$

$$\times P_{\nu}^{r}(x) F \left[\begin{array}{c|l} l+2 & \lambda+\frac{1}{2}r, \lambda-\frac{1}{2}r, a_1 \ldots, a_l \\ m & b_1, c_1, \ldots, a_m, c_m \\ n+2 & d_1, \ldots, d_n, 1+\lambda+\frac{1}{2}\nu, \lambda-\frac{1}{2}\nu \\ p & e_1, f_1, \ldots, e_p, f_p \end{array} \middle| y, z \right] \qquad (4\cdot2)$$

जहाँ $p+n<l+m+1$, $|\arg y|<\frac{1}{2}(l+m+1-p-n)\pi$, $|\arg z|<\frac{1}{2}(l+m+1-p-n)\pi$

(ii) समस्त बड़े अक्षरों को इकाई के तुल्य तथा $\delta=1$ मानने पर हमें (3·1) से लेकर (3·6) तक गुलाटी द्वारा प्राप्त फल (जब $\delta=1$) प्राप्त होते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं राजकीय महाविद्यालय, मंदसौर के डा० एच० सी० गुलाटी का कृतज्ञ हूँ जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में मेरा मार्ग दर्शन किया।

निर्देश

1. ब्रामविच, टी० जे० आई०, Theory of Infinite Series, **मैकमिलन कम्पनी**, 1955.
2. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग II, **मैकग्राहिल**, 1954.
3. गुलाटी, एच० सी०, **प्रकाशनार्थ प्रेषित**
4. वही, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1971, **14**, 77-88.
5. मुनोट, पी० सी० तथा कल्ला, एस० एल०, **प्रकाशनार्थ प्रेषित**
6. व्हिटेकर, ई० टी० तथा वाट्सन, जी० एम०, A Course of Modern Analysis **कैम्ब्रिज यूनीवर्सिटी प्रेस** 1965.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 1, January, 1975, Pages 57-65

कुमर के परिवर्त के सम्बन्ध में कतिपय प्रमेय

आर० सी० व्यास तथा आर० के० सक्सेना
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त--मई 18, 1973]

सारांश

दो चरों में कुमर के परिवर्तों के सम्बन्ध में कतिपय प्रमेय प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

Some theorems on Kummer's transform in two variables. *By* R. C. Vyas and R. K. Saxena, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

In this paper some theorems on Kummer's transform in two variables are obtained.

1. परिचय

लैप्लास परिवर्त

$$(p, q)=pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy} f(x, y)\ dxdy, \tag{1·1}$$

का सार्वीकरण इन्हीं लेखकों[2] द्वारा निम्नांकित रूप में प्रस्तुत किया जा चुका है

$$(p, q)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\delta)} pq\int_0^\infty\int_0^\infty {}_1F_1(\alpha; \beta; -px)\times{}_1F_1(\gamma; \delta; -qy)\cdot f(x, y)\ dx\ dy \tag{1·2}$$

हम इस समाकल सम्बन्ध (1·2) को

$$\phi(p, q)=K[f(x, y); \alpha, \beta; \gamma, \delta].$$

के द्वारा परिभाषित करेंगे। यदि (1·2) में $\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$ रखें तो (1·1) की प्राप्ति होगी जिसे हम

$$\phi(p, q) = L[f(x, y)]$$ द्वारा व्यक्त करेंगे ।

लैप्लास परिवर्त की ही भाँति $f(x, y)$ को $\phi(p, q)$ का मूल रूप और $\phi(p, q)$ को इसका प्रतिबिम्ब कहेंगे ।

2. अनुभाग I

इस अनुभाग में $f(x, y)$ की प्राप्ति की गई है जब $\phi(p, q)$ को $1/pq$ के घात द्वारा विस्तारित करके प्रस्तुत करते हैं और इसका निर्वचन

$$\frac{\Gamma(n_1+1)\Gamma(n_2+1)\Gamma(\alpha-n_1-1)\Gamma(\gamma-n_2-1)}{\Gamma(\beta-n_1-1)\Gamma(\delta-n_2-1)} p^{-n_1} q^{-n_2}$$

$$= K[x^{n_1} y^{n_2}; \alpha, \beta; \gamma, \delta]. \tag{2·1}$$

$Re\ \alpha > n_1+1$, $Re \gamma > n_2+1$, $Re(p,q) > 0$, $Re(n_1+1) > 0$, तथा $Re(n_2+1) > 0$ फल द्वारा करते हैं । पदशः निर्वचन वैध है यदि

(I) श्रेणी

$$\phi(p, q) = \sum_m \sum_n \phi_{m,n}(p, q)$$

पूर्णतया अभिसारी हो,

(ii) मूल रूप

$$\phi_{m,n}(p, q) = K[f_{m,n}(x, y); \alpha, \beta; \gamma, \delta]$$

ऐसे हों कि श्रेणी

$$\sum_m \sum_n \int_0^\infty \int_0^\infty {}_1F_1(\alpha, \beta; -p_0 x)\ {}_1F_1(\gamma, \delta; -q_0 y) |f_{m,n}(x, y)|\ dx\ dy$$

समान रूप से अभिसारी हो तो $\sum_m \sum_n f_{m,n}(x, y)$ मूलों की श्रेणी सर्वत्र ही फलन $f(x, y)$ में अभिसारी होती है जो $\phi(p, q)$ का मूल रूप है ।

(a) माना कि

$$\phi(p, q) = \frac{(pq)^\mu}{(pq+a)^\nu} = \sum_{r=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+r)(-a)^r}{r!\ \Gamma(\nu)(pq)^{\nu-\mu+r}}$$

अब (2·1) की सहायता से दाहिने पक्ष के निर्वचन से हमें

$$\frac{(pq)^\mu}{(pq+a)^\nu}=K\Bigg[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+r)\Gamma(\beta-\nu+\mu-r-1)\Gamma(\delta-\nu+\mu-r-1)}{r!\,\Gamma(\nu)\{\Gamma(\nu-\mu+r+1)\}^2\Gamma(\alpha+\mu-\nu-r-1)}$$

$$\frac{(xy)^{\nu-\mu+r}}{\Gamma(\gamma-\nu+\mu-r-1)}(-a)^r;\ \alpha,\beta;\ \gamma,\delta\Bigg]$$

$$=K\Bigg[\frac{\Gamma(\beta-\nu+\mu-1)\,\Gamma(\delta-\nu+\mu-1)}{\Gamma(\alpha-\nu+\mu-1)\Gamma(\gamma-\nu+\mu-1)\{\Gamma(\nu-\mu+1)\}^2}(xy)^{\nu-\mu}$$

$${}_3F_4\left\{\begin{matrix}\nu,\ \nu-\mu-\alpha+2,\ \nu-\mu-\gamma+2\\ \nu-\mu-\beta+2,\ \nu-\mu-\delta+2,\ \nu-\mu+1,\ \nu-\mu+1\end{matrix};-axy;\right\};\ \alpha,\beta;\ \gamma,\delta\Bigg]\qquad(2\cdot2)$$

$Re(\alpha-\nu+\mu)>1$, $Re(\gamma-\nu+\mu)>1$, $Re(\nu-\mu+1)>0$ तथा $Re(a, pq)>0$

प्राप्त होता है।

पदशः निर्वचन वैध है क्योंकि ऊपर दिये हुये समस्त प्रतिबन्ध तुष्ठित हो जाते हैं।

$\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$ रखने पर (2·2) ज्ञात फल

$$\frac{(pq)^\mu}{(pq+a)^\nu}=L\Bigg[\frac{(xy)^{\nu-\mu}}{\{\Gamma(\nu-\mu+1)\}^2}\,{}_1F_2\left\{\begin{matrix}\nu\\ \nu-\mu+1,\ \nu-\mu+1\end{matrix};-axy\right\}\Bigg]\qquad(2\cdot3)$$

में समानीत होता है जहाँ $R(\nu-\mu+1)>0$.

(b) माना कि

$$\phi(p,q)=(pq)^\mu\,\mathcal{J}_\nu\left(\frac{a}{\sqrt{(pq)}}\right)=(\tfrac{1}{2}a)^\nu\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-)^r(\tfrac{1}{2}a)^{2r}}{r!\,\Gamma(\nu+r+1)(pq)^{r+1/2\nu-\mu}}$$

$$=K\Bigg[\frac{\Gamma(\beta+\mu-\tfrac{1}{2}\nu-1)\Gamma(\delta+\mu-\tfrac{1}{2}\nu-1)(xy)^{\nu/2-\mu}(\tfrac{1}{2}a)^\nu}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+\mu-\tfrac{1}{2}\nu-1)\Gamma(\gamma+\mu-\tfrac{1}{2}\nu-1)\{\Gamma(\tfrac{1}{2}\nu-\mu+1)\}^2}$$

$${}_2F_5\left\{\begin{matrix}2-\alpha-\mu+\tfrac{1}{2}\nu,\ 2-\gamma-\mu+\tfrac{1}{2}\nu\\ \nu+1,\ 2-\beta-\mu+\tfrac{1}{2}\nu,\ 2-\delta-\mu+\tfrac{1}{2}\nu,\ \tfrac{1}{2}\nu-\mu+1,\ \tfrac{1}{2}\nu-\mu+1\end{matrix};\tfrac{1}{4}a^2xy\right\}$$

$$;\ \alpha,\beta;\ \gamma,\delta\Bigg].\qquad(2\cdot4)$$

यदि $Re(\alpha+\mu-\tfrac{1}{2}\nu)>1$, $Re(\gamma+\mu-\tfrac{1}{2}\nu)>1$, $Re(\tfrac{1}{2}\nu-\mu+1)>0$ तथा $Re(a^2, p, q)>0$.

$\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$ रखने पर (2·4) ज्ञात फल

$$\phi(p,q)=(pq)^\mu\,\mathcal{J}_\nu\left(\frac{a}{\sqrt{(pq)}}\right)=L\Bigg[\frac{(\tfrac{1}{2}a)^\nu\,(xy)^{1/2\nu-\mu}}{\Gamma(\nu+1)\{\Gamma(\tfrac{1}{2}\nu-\mu+1)\}^2}$$

$$\times{}_0F_3\left\{-;\ \nu+1,\ \tfrac{1}{2}\nu-\mu+1,\ \tfrac{1}{2}\nu-\mu+1;\ -\tfrac{1}{4}a^2xy\right\}\Bigg].\qquad(2\cdot5)$$

में समानीत हो जाता है यदि $Re(\frac{1}{2}\nu-\mu+1)>0$ तथा $Re(a^2, p, q)>0$

(c) माना कि

$$\phi(p, q)=p^{\mu_1} q^{\mu_2} \mathcal{J}_{\nu_1}\left(\frac{a}{p}\right) \mathcal{J}_{\nu_2}\left(\frac{b}{q}\right),$$ a तथा b वास्तविक हैं

$$=K\left[\frac{a^{\nu_1} b^{\nu_2} x^{\nu_1-\mu_1} y^{\nu_2-\mu_2} \Gamma(\beta-\nu_1+\mu_1-1)}{2^{\nu_1+\nu_2} \Gamma(\nu_1+1) \Gamma(\alpha-\nu_1+\mu_1-1) \Gamma(\nu_2+1)}\right.$$

$$\frac{\Gamma(\delta-\nu_2+\mu_2-1)}{\Gamma(\gamma-\nu_2+\mu_2-1) \Gamma(\nu_1-\mu_1+1) \Gamma(\nu_2-\mu_2+1)}$$

$$\times {}_2F_5\left\{\begin{matrix}(\nu_1-\mu_1-\alpha+2)/2, (\nu_1-\mu_1-\alpha+3)/2 \\ \nu_2+1, (\nu_1-\mu_1-\beta+2)/2, (\nu_1-\mu_1-\beta+3)/2, (\nu_1-\mu_1+1)/2, \\ (\nu_1-\mu_1+2)/2; -\frac{1}{4}a^2 x^2\end{matrix}\right\}$$

$$\times {}_2F_5\left\{\begin{matrix}(\nu_2-\mu_2-\gamma+2)/2,, (\nu_2-\mu_2-\gamma+3)/2 \\ \nu_2+1, (\nu_2-\mu_2-\delta+2)/2\ (\nu_2-\mu_2-\delta+3)/2, (\nu_2-\mu_2+1)/2, (\nu_2-\mu_2+2)/2; -\frac{1}{4}b^2 y^2\end{matrix}\right\};$$

$$\left.\alpha, \beta; \gamma, \delta\right] \qquad (2\cdot6)$$

यदि $Re(\alpha-\nu_1+\mu_1)>1$, $Re(\gamma-\nu_2+\mu_2)>1$, $Re(\nu_1-\mu_1+1)>0$, $Re(\nu_2-\mu_2+1)>0$ तथा $Re(p, q)>0$.

यदि $\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$ रखें तो (2·6) ज्ञात फल

$$\phi(p, q)=L\left[\frac{a^{\nu_1} b^{\nu_2} x^{\nu_1-\mu_1} y^{\nu_2-\mu_2}}{2^{\nu_1+\nu_2} \Gamma(\nu_1+1) \Gamma(\nu_2+1) \Gamma(\nu_1-\mu_1+1) \Gamma(\nu_2-\mu_2+1)}\right.$$

$$\times {}_0F_3\left\{\nu_1+1, (\nu_1-\mu_1+1)/2, (\nu_1-\mu_1+2)/2; -\frac{a^2x^2}{4^2}\right\}$$

$$\left.\times {}_0F_3\left\{\nu_2+1, (\nu_2-\mu_2+1)/2, (\nu_2-\mu_2+2)/2; -\frac{b^2 y^2}{4^2}\right\}\right] \qquad (2\cdot7)$$

में समानीत होता है यदि $Re(\nu_r-\mu_r+1)>0$, $r=1, 2$; $Re(p, q)>0$.

3. अनुभाग II

हमें ज्ञात है कि यदि

$$\phi_1(p, q)=K[f_1(x, y); \alpha, \beta; \gamma, \delta].$$

तथा

$$\phi_2(p,q)=K[f_2(x, y); \alpha, \beta; \gamma, \delta].$$

तो $$\int_0^\infty\int_0^\infty \phi_1(u,v) f_2(u,v)\ \frac{du}{u}\frac{dv}{v} = \int_0^\infty\int_0^\infty \phi_2(s,t) f_1(s,t)\ \frac{ds}{s}\frac{dt}{t}, \tag{3·1}$$

बशर्ते कि समाकल पूर्णतया अभिसारी हों और $f_1(x,y)$ तथा $f_2(x,y)$ x तथा y के संतत फलन हों क्योंकि $x \geqslant \epsilon > 0$ तथा $y \geqslant \eta > 0$.

इस अनुभाग में (3·1) के उपयोग द्वारा दो चरों वाले कुमर परिवर्त का एक गुण प्राप्त किया गया है जिसमें ν_1 तथा ν_2 कोटि के हैंकेल परिवर्त का आत्म व्युत्क्रम फलन सन्निहित है। इस गुण को एक प्रमेय द्वारा व्यक्त किया गया है।

प्रमेय I

यदि $\phi(p, q) = K[f(x,y);\ \alpha, \beta;\ \gamma, \delta]$,

तथा $x^{-\mu_1-3/2}\ y^{-\mu_2-3/2}\ f(1/x,\ 1/y)$

ν_1 तथा ν_2 कोटि के हैंकेल परिवर्त में आत्म व्युत्क्रम हो तो

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^{-\nu_1-\mu_1-1}\ y^{-\nu_2-\mu_2-1}$$

$$\times\ {}_2F_5\left\{\begin{matrix}(\nu_1-\mu_1-\alpha+2)/2,\ (\nu_1-\mu_1\pm\alpha+3)/2;\ -(a^2x^2)/4^2\\ \nu_1+1,\ (\nu_1-\mu_1-\beta+2)/2,\ (\nu_1-\mu_1-\beta+3)/2,\ (\nu_1-\mu_1+1)/2,\ (\nu_1-\mu_1+2)2\end{matrix}\right\}$$

$$\times\ {}_2F_5\left\{\begin{matrix}(\nu_2-\mu_2-\gamma+2)/2,\ [\nu_2\mu_2-\gamma+3)/2;\ -b^2y^2/4^2\\ \nu_2+1,\ (\nu_2-\mu_2-\delta+2)/2,\ (\nu_2-\mu_2-\delta+3)/2,\ (\nu_2-\mu_2+1)/2,\ (\nu_2-\mu_2+2)/2\end{matrix}\right\}$$

$$\phi(x,y)\ dx\ dy$$

$$= \frac{2^{\nu_1+\nu_2}\ \Gamma(\nu_1+1)\Gamma(\nu_2+1)\ \Gamma(\alpha-\nu_1+\mu_1-1)}{a^{\nu_1+\mu_1+2}\ b^{\nu_2+\mu_2+2}\ \Gamma(\beta-\nu_1+\mu_1-1)}$$

$$\times\ \frac{\Gamma(\gamma_2-\nu_2-\mu_2-1)\,\Gamma(\nu_1-\mu_1+1)\,\Gamma(\nu_2-\mu_2+1)}{\Gamma(\delta-\nu_2+\mu_2-1)} f(1/a,\ 1/b), \tag{3·2}$$

बशर्ते कि $Re(\beta-\nu_1+\mu_1)>1$, $Re(\delta-\nu_2+\mu_2)>1$, $f(x,y)$ संतत हो क्योंकि $x \geqslant \epsilon > 0$, $y \geqslant \eta > 0$ तथा समाकल पूर्णतया अभिसारी हों।

उपपत्ति

यदि हम (3·1) में

$$\phi(p, q) = K[f(x,y);\ \alpha, \beta;\ \gamma, \delta]$$

तथा (2·6) को परिवर्त लेते हैं तो

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\nu_1-\mu_1-1}\, y^{\nu_2-\mu_2-1}\, {}_2F_5 \left\{ \begin{matrix} (\nu_1-\mu_1-\alpha+2)/2, \\ \nu_1+1,\ (\nu_1-\mu_1-\beta+2),(\nu_1-\mu_1-\beta+3)2. \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (\nu_1-\mu_1-\alpha+3)/2 \\ (\nu_1-\mu_1+1)/2,\ (\nu_1-\mu_1+2)/2;\ -a^2x^2/4^2 \end{matrix} \right\},$$

$$\times {}_2F_5 \left\{ \begin{matrix} (\nu_2-\mu_2-\gamma+2)/2,\ (\nu_2-\mu_2-\gamma+3)/2;\ -b^2y^2/4^2 \\ \nu_2+1,\ (\nu_2-\mu_2-\delta+2)/2,\ (\nu_2-\mu_2-\delta+3)/2,\ (\nu_2-\mu_2+1)/2,\ (\nu_2-\mu_2+2)/2 \end{matrix} \right\}$$

$$\Phi(x, y)\ dx\ dy$$

$$= \frac{2^{\nu_1+\nu_2}\, \Gamma(\nu_1+1)\Gamma(\nu_2+1)\Gamma(\alpha-\nu_1+\mu_1-1)}{a^{\nu_1}\, b^{\nu_2}\, \Gamma(\beta-\nu_1+\mu_1-1)}$$

$$\times \frac{\Gamma(\gamma-\nu_2+\mu_2-1)\Gamma(\nu_1-\mu_1+1)\Gamma(\nu_2-\mu_2+1)}{\Gamma(\delta-\nu_2+\mu_2-1)}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\nu_1-1}\, y^{\nu_2-1}\, J_{\nu_1}(a/x)\, J_{\nu_2}(b/y)\, f(x, y)\ dx\ dy$$

$$= \frac{2^{\nu_1+\nu_2}\, \Gamma(\nu_1+1)\Gamma(\nu_2+1)\Gamma(\alpha-\nu_1+\mu_1-1)}{a^{\nu_1+1/2}\, b^{\nu_2+1/2}\, \Gamma(\beta-\nu_1+\mu_1-1)}$$

$$\times \frac{\Gamma(\gamma-\nu_2+\mu_2-1)\Gamma(\nu_1-\mu_1+1)\Gamma(\nu_2-\mu_2+1)}{\Gamma(\delta-\nu_2+\mu_2-1)}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (ax)^{1/2}\, (by)^{1/2}\, J_{\nu_1}(ax)\, J_{\nu_2}(by)\, x^{-\mu_1-3/2}\, y^{-\mu_2-3/2} f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) dx\ dy$$

$$= \frac{2^{\nu_1+\nu_2}\, \Gamma(\nu_1+1)\Gamma(\nu_2+1)\Gamma(\alpha-\nu_1+\mu_1-1)}{a^{\nu_1+\mu_1+2}\, b^{\nu_2+\mu_2+2}}$$

$$\times \frac{\Gamma(\gamma-\nu_2+\mu_2-1)\Gamma(\nu_2-\mu_1+1)\Gamma(\nu_2-\mu_2+1)}{\Gamma(\beta-\nu_1+\mu_1-1)\Gamma(\delta-\nu_2+\mu_2-1)} f(1/a, 1/a).$$

बशर्ते कि $Re(\beta-\nu_1+\mu_1)>1$, $Re(\delta-\nu_2+\mu_2)>1$, $f(x, y)$ संतत हो क्योंकि $x>\epsilon>0$, $y>\eta>0$ तथा समाकल पूर्णतया अभिसारी हों ।

उपप्रमेय

यदि हम $\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$, लें तो लैप्लास परिवर्त में निम्नलिखित फल प्राप्त होता है :

यदि
$$\phi(p, q) = L[f(x, y)],$$

तथा $x^{-\mu_1-3/2}\ y^{-\mu_2-3/2}\ f(1/x, 1/y)$ ν_1 तथा ν_2 कोटि के हैंकेल परिवर्त में आत्म व्युत्क्रम है तो

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{\nu_1-\mu_1-1}\, y^{\nu_2-\mu_2-1}\, {}_0F_3 \left\{ \nu_1+1,\ (\nu_1-\mu_1+1)/2,\ (\nu_1-\mu_1+2)/2;\ -a^2x^2/4^2 \right\}$$

$$\times {}_0F_2\{\nu_2+1, (\nu_2-\mu_2+1)/2, (\nu_2-\mu_2+2)/2; -b^2y^2/4^2\} \phi(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{2^{\nu_1+\nu_2}\Gamma(\nu_1+1)\Gamma(\nu_2+1)\Gamma(\nu_1-\mu_1+1)\Gamma(\nu_2-\mu_2+1)}{a^{\nu_1+\mu_1+2}\, b^{\nu_2+\mu_2+2}} f\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right). \qquad (3\cdot3)$$

बशर्ते कि $Re(\nu_r-\mu_r+1)>0$, $r=1, 2$ तथा समाकल पूर्णतया अभिसारी हों।

प्रमेय II

यदि हम (3·1) में

$$\phi(p, q)=K[f(x, y); \alpha, \beta; \gamma, \delta]$$

तथा (2·2) इन दो परिवर्तों को लें तो

$$\frac{\Gamma(\beta-\nu+\mu)\Gamma(\delta-\nu+\mu)}{\Gamma(\alpha-\nu+\mu)\Gamma(\gamma-\nu+\mu)\{\Gamma(\nu-\mu+1)^2\}}$$

$$\times \int_0^\infty\int_0^\infty (xy)^{\nu-\mu-1}\, {}_3F_4\left\{\begin{matrix}\nu, \nu-\mu-\alpha+1, \nu-\mu-\gamma+1\\ \nu-\mu-\beta+1, \nu-\mu-\delta+1, \nu-\mu+1, \nu-\mu+1\end{matrix}; -axy\right\}$$

$$\phi(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(xy)^{\mu-1}}{(xy+a)^\nu} f(x, y)\, dx\, dy, \qquad (3\cdot4)$$

बशर्ते $Re(\alpha-\mu+\nu)>0$, $Re(\nu-\mu+1)>0$, $Re(\nu-\mu+1)>0$, $f(x, y)$ एक संतत फलन है क्योंकि $x\geqslant\epsilon>0$, $y\geqslant\epsilon>0$ तथा समाकल पूर्णतया अभिसारी हों।

यदि हम $a=1/pq$ मानें और बाईं ओर को

$$1/(pq)^n=L\left[\frac{(st)^n}{\{\Gamma(n+1)\}^2}\right], \quad Re(n+1)>0 \text{ तथा } Re(p, q)>0$$

के द्वारा निर्वचित करें तो हमें (3·5) प्राप्त होगा :

$$\frac{\Gamma(\beta-\nu+\mu)\Gamma(\delta-\nu+\mu)}{\Gamma(\alpha-\nu+\mu)\Gamma(\gamma-\nu+\mu)\Gamma(\nu-\mu+1)} \int_0^\infty\int_0^\infty (xy)^{\nu-\mu-1}$$

$$\times {}_3F_6\left\{\begin{matrix}\nu, \nu-\mu-\alpha+1, \nu-\mu-\gamma+1\\ 1, 1, \nu-\mu-\beta+1, \nu-\mu-\delta+1, \nu-\mu+1, \nu-\mu+1\end{matrix}, -stxy\right\} \phi(x, y)\, dx\, dy$$

$$=L\left[(pq)^\nu \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(xy)^{\mu-1}}{(1+pq\, xy)^\nu} f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (3\cdot5)\right.$$

यदि हम $\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$, रखें तो यह ज्ञात फल में समानीत हो जाता है।

$$\frac{1}{\{\Gamma(\nu-\mu+1)\}^2}\int_0^\infty\int_0^\infty (xy)^{\nu-\mu-1}\,{}_1F_4\left\{\begin{matrix}\nu\\ 1,\,1,\,\nu-\mu+1,\,\nu-\mu+1\end{matrix};\,-stxy\right\}\phi(x,y)\,dx\,dy$$

$$=L\left[(pq)^\nu\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(xy)^{\mu-1}}{(1+pqxy)^\nu}f(x,y)\,dx\,dy\right],$$

बशर्ते कि $Re(\nu-\mu+1)>0$, $Re(p,q)>0$, $f(x,y)$ एक संतत फलन है क्योंकि $x>\epsilon>0\ y>\eta>0$ तथा समाकल पूर्णरूप से अभिसारी हैं।

प्रमेय III

यदि (3·1) में हम

$$\phi(p,q)=K[\,f(x,y);\,\alpha,\,\beta;\,\gamma,\,\delta]$$

तथा (2·4), इन दो परिवर्तों को लें तो

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (xy)^{\nu/2-\mu-1}\,{}_2F_5\left\{\begin{matrix}2-\alpha-\mu+\nu/2,\ 2-\gamma-\mu+\nu/2\\ \nu+1,\ 2-\beta-\mu+\nu/2,\ 2-\delta-\mu+\nu/2,\ \nu/2-\mu+1,\nu/2-\mu+1\end{matrix};\,-a^2xy/4\right\}\phi(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\frac{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+\mu-\nu/2-1)\Gamma(\gamma+\mu-\nu/2-1)}{a^\nu\,\Gamma(\beta+\mu-\nu/2-1)}$$

$$\times\frac{\{\Gamma(\nu/2-\mu+1)\}^2}{\Gamma(\delta+\mu-\nu/2-1)}\int_0^\infty\int_0^\infty (xy)^{\mu-1}\,J_\nu\left(\frac{a}{\sqrt{(xy)}}\right)f(x,y)\,dx\,dy, \qquad (3\cdot6)$$

बशर्ते $Re(\beta+\mu-\nu/2)>1$, $Re(\delta+\mu-\nu/2)>1$, $Re(a^2)>0$ तथा समाकल पूर्णतया अभिसारी हों।

यदि $\alpha=\beta$, $\gamma=\delta$, तो

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (xy)^{\nu/2-\mu-1}\,{}_0F_3\left\{\nu+1,\ \nu/2-\mu+1,\ \nu/2-\mu+1,\ ;-a^2xy/4\right\}\phi(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\frac{2^\nu\,\Gamma(\nu+1)\{\Gamma(\nu/2-\mu+1)\}^2}{a^\nu}$$

$$\times\int_0^\infty\int_0^\infty (xy)^{\mu-1}\,J_\nu\left(\frac{a}{\sqrt{(xy)}}\right)f(x,y)\,dx\,dy \qquad (3\cdot7)$$

बशर्ते कि $Re(\nu/2-\mu+1)>0$ $Re(a^2)>0$ तथा समाकल पूर्णतया अभिसारी हों।

$a=2\sqrt{(st)}$ रखने पर तथा (4·2) के द्वारा पहले की तरह निर्वचन करने पर हमें

$$\int_0^\infty\int_0^\infty (xy)^{\nu/2-\mu-1}$$

$$\times {}_0F_3\{\nu+1,\ \nu/2-\mu+1,\ \nu/2-\mu+1;\ -stxy\}\ \phi(x, y)\ dx\ dy$$

$$L\Big[\ \Gamma(\nu+1)\{\Gamma(\nu/2-\mu+1)\}^2 \int_0^\infty \int_0^\infty (xy)^{\mu-\nu/2-1}$$

$$\times {}_2F_1\left\{\begin{matrix}1, 1\\ \nu+1\end{matrix}\ ;-\frac{1}{pqxy}\right\} f(x, y)\ dx\ dy\Big] \tag{3·8}$$

प्राप्त होता है बशर्ते $Re(\nu/2-\mu+1)>0$, $Re(p, q)>0$ तथा समाकल पूर्णतया अभिसारी हों।

निर्देश

1. पोली तथा डेलेरू, Le Calcul Symbolique a deux Variables et ses applications. **गैंथियर विलर्स, पेरिस** 1954.
2. व्यास, आर० सी० तथा सक्सेना, आर० के०, Riv. Mat. Univ. Parma 1969, **10**, 23-32.
3. बोस, एस० के०, **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०**, 1949, **41**, 173-178.
4. ब्रामविच, टी० जे० आई०, An Introduction to the Theory of Infinite Series, **लन्दन** 1931.
5. डिटकिन, वी० ए० तथा प्रुणिड्कॉव, ए० पी०, Operational Calculus in two variables and its Applications, **पर्गमान प्रेस** 1962.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 1, January, 1974, Pages, 67-73

जैकोबी बहुपदियों वाले दो चरों के H-फलन का प्रसार सूत्र

जी० सी० मोदी
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—अक्टूबर 10, 1973]

सारांश

इस शोधपत्र में दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन का प्रसार सूत्र निकाला गया है जिससे जैकोबी बहुपदियों के लिये सक्सेना द्वारा प्राप्त फल का सार्वीकरण हो जाता है। ऐपेल फलनों वाली कुछ रोचक दशाओं का भी उल्लेख हुआ है।

Abstract

An expansion formula for H-function of two variables involving Jacobi polynomials. *By* G. C. Modi, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Rajasthan.

In this paper an expansion formula involving generalized H-function of two variables has been evaluated which generalizes a result due to Saxena for Jacobi polynomials. A few interesting particular cases have been mentioned involving Appell's functions.

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य सक्सेना के फल [3, p. 64-65 (6)] का विस्तार करना है जो स्वयं एर्डेल्यी के सूत्र [1, p 283 (7)] का सार्वीकरण है।

$$ {}_1F_1(\xi;\eta;\zeta t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n(\xi)_n}{(g+n)_n\Gamma(n+1)} \tag{1·1}$$

$$\times {}_2F_1(-n, g+n;\eta;\zeta)\;{}_1F_1(\xi+n; g+2n+1; t),$$

जहाँ g ऋण विषम पूर्णांक नहीं है। (1·1) में आया हुआ गॉस फल F जैकोबी बहुपदी है।

[1, p. 79 (4)], से हमें

$$\frac{a^s\, \Gamma(a+s)\Gamma(b)\Gamma(-s)}{\Gamma(b+s)\Gamma(a)} = \int_0^\infty {}_1F_1\,(a;\, b;\, -az) z^{-s-1}\, dz,\; Re\,(a+s) > 0. \quad (1\cdot 2)$$

प्राप्त होता है।

दो चरों वाले सार्वीकृत H-फलन को सक्सेना [4, p. 185 (2·1)] का अनुगमन करते हुये द्विगुण मेलिन-बार्नीज प्रकार के समाकल के रूप में निम्न प्रकार से अंकित किया जा सकता है।

$$H\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = H^{l,\, n_1,\, n_2,\, m_1,\, m_2}_{E,\, [A:C],\, F,\, [B:D]} \left[\begin{array}{c|c} & (e,\, \theta) \\ x & (a,\, \alpha)^*;\; (c,\, \gamma) \\ y & (f;\, \phi) \\ & (b,\, \beta);\; (d,\, \delta) \end{array} \right] \quad (1\cdot 3)$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} \chi_1(s)\; \chi_2(t)\; \chi_3\,(s+t) x^{-s}\, y^{-t}\; ds\, dt$$

जहाँ रिक्त गुणनफल इकाई मान लिया जाता है।

$$\chi_1(s) = \frac{\prod\limits_1^{m_1} \Gamma(b_j+\beta_j s) \prod\limits_1^{n_1} \Gamma(1-a_j-\alpha_j s)}{\prod\limits_{m_1+1}^{B} \Gamma(1-b_j-\beta_j s) \prod\limits_{n_1+1}^{A} \Gamma(a_j+\alpha_j s)},$$

$$\chi_2(t) = \frac{\prod\limits_1^{m_2} \Gamma(d_j+\delta_j t) \prod\limits_1^{n_2} \Gamma(1-c_j-\gamma_j t)}{\prod\limits_{m_2+1}^{D} \Gamma(1-d_j-\delta_j t) \prod\limits_{n_2+1}^{C} \Gamma(c_j+\gamma_j t)},$$

तथा

$$\chi_3(u) = \frac{\prod\limits_1^{l} \Gamma(e_j-u\theta_j)}{\prod\limits_{l+1}^{E} \Gamma(1-e_j+\theta_j u) \prod\limits_1^{F} \Gamma(f_j-u\phi_j)}.$$

निम्नांकित सरलीकृत संकल्पनायें भी की जाती हैं :

---

* संकेत (a, α) से $(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2), \ldots, (a_A, \alpha_A)$, प्राचलों का क्रम सूचित होता है

(i) $0 \leqslant n_1 \leqslant A,\ 1 \leqslant m_1 \leqslant B,\ 0 \leqslant n_2 \leqslant C,\ 1 \leqslant m_2 \leqslant D,\ 0 \leqslant l \leqslant E.$

(ii) $l, m_1, n_1, m_2, A, B, C, D, E$ तथा F ग्रनृण पूर्णांक हैं।

(iii) समाकल्य के सभी पोल सरल हैं।

(iv) समस्त $a, b, c, d, e, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \phi$ तथा f वास्तविक हैं और समस्त $a', \beta', \gamma', \delta', \theta'$ तथा ϕ धनात्मक हैं।

(v) समाकल (1·3) ग्रभिसारी होता है यदि

$$\Psi_1 \equiv \sum_1^E \theta_j + \sum_1^B \beta_j \quad \sum_1^F \phi_j - \sum_1^A \alpha_j \leqslant 0,$$

$$\Psi_2 \equiv \sum_1^E \theta_j + \sum_1^D \delta_j - \sum_1^F \phi_j - \sum_1^C \gamma_j \leqslant 0.$$

$$|\arg x| < \frac{\pi\lambda_1}{2};\ |\arg y| < \frac{\pi\lambda_2}{2},$$

जहाँ $$\lambda_1 \equiv \sum_1^{m_1} \beta_j - \sum_{m_1+1}^{B} \beta_j + \sum_1^{n_1} a_j - \sum_{n_1+1}^{A} a_j + \sum_1^{l} \theta_j - \sum_{l+1}^{E} \theta_j - \sum_1^{F} \phi_j > 0,$$

तथा $$\lambda_2 \equiv \sum_1^{m_2} \delta_j - \sum_{m_2+1}^{D} \delta_j + \sum_1^{n_2} \gamma_j - \sum_{n_2+1}^{C} \gamma_j + \sum_1^{l} \theta_j - \sum_{l+1}^{E} \theta_j - \sum_1^{F} \phi_j > 0.$$

दो चरों वाले H-फलन के विस्तृत विवेचन के लिये मुनोट तथा कल्ला[2] तथा सक्सेना[4] का कार्य देखें।

फल [1. p. 232 (9 to 13)] तथा (1·3) के निष्कर्ष निम्न प्रकार हैं :

$$F_1(\alpha; \beta, \beta'; \gamma; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\beta')} \tag{1·4}$$

$$\times H^{1,\,1,\,1,\,1,\,1}_{1,\,[1\,:\,1],\,1,\,[1\,:\,1]}\left[\begin{array}{c|c} & (\alpha, 1) \\ -x & (1-\beta, 1); (1-\beta', 1) \\ -y & (\gamma, 1) \\ & (0, 1); (0, 1) \end{array}\right],$$

$|x| < 1,\ |y| < 1.$

$$F_2(\alpha; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\beta')} \tag{1·5}$$

$$\times H^{1,\,1,\,1,\,1,\,1}_{1,\,[1\,:\,1],\,0,\,[2\,:\,2]}\left[\begin{matrix}-x\\ \\-y\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}(\alpha,1)\\(1-\beta,1);(1-\beta',1)\\ \\(0,1),(1-\gamma,1);(0,1),(1-\gamma',1)\end{matrix}\right],$$

$|x|+|y|<1.$

$$F_3(\alpha,\alpha';\beta,\beta';\gamma;x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha')\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\beta')} \tag{1·6}$$

$$\times H^{0,\,2,\,2,\,1,\,1}_{0,\,[2\,:\,2],\,1,\,[1,\,1]}\left[\begin{matrix}-x\\ \\-y\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\alpha,1),(1-\beta,1);(1-\alpha',1),(1-\beta',1)\\(\gamma,1)\\(0,1);(0,1)\end{matrix}\right],$$

$|x|<1,\ |y|<1.$

$$F_4(\alpha,\beta;\gamma,\gamma';x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma')}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \tag{1·7}$$

$$\times H^{2,\,0,\,0,\,1,\,1}_{2,\,[0\,:\,0],\,0,\,[2\,:\,2]}\left[\begin{matrix}-x\\ \\-y\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}(\alpha,1),(\beta,1)\\ \\ \\(0,1),(1-\gamma,1);(0,1),(1-\gamma',1)\end{matrix}\right],$$

$|x|^{1/2}+|y|^{1/2}<1.$

2. संगमी हाइपरज्यामितीय फलन वाला समाकल

$$\int_0^\infty x^{p-1}\,{}_1F_1(\xi;\eta;-\zeta x)\,H\begin{bmatrix}\sigma x\\ \rho\end{bmatrix}dx=\frac{\Gamma(\eta)}{\Gamma(\xi)\,\zeta^p}$$

$$\times H^{l,\,n_1+1,\,n_2,\,m_1+1,\,m_2}_{E,\,[A+2\,:\,C],\,F,\,[B+1\,:\,D]}\left[\begin{matrix}\sigma\\ \zeta\\ \\ \rho\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}(e,\theta)\\(1-p,1),(a,\alpha),(\eta-p,1);(c,\gamma)\\(f,\phi)\\(\xi-p,1),(b,\beta);(d,\delta)\end{matrix}\right],$$

जहाँ $Re(\zeta)>0;\ \lambda_1,\ \lambda_2>0;\ \psi_1,\psi_2>0,\ Re\left(p+\frac{bi}{\beta_i}\right)>0$

क्योंकि $i=1, \ldots, m_1$; $|\arg \sigma| < \frac{\pi\lambda_1}{2}$, $|\arg \rho| < \frac{\pi\lambda_2}{2}$.

(1·2) समाकल का उपयोग करते हुये सक्सेना[4] की ही भाँति उपर्युक्त समाकल की स्थापना की जा सकती है ।

3. प्रसार सूत्र

$$\frac{\Gamma(\eta)}{\zeta p} H^{l,\, n_1+1,\, n_2,\, m_1,\, m_2}_{E,\, [A+2\,:\,C],\, F,\, [B\,:\,D]} \left[\begin{array}{c|c} & (e, \theta) \\ \frac{\sigma}{\zeta} & (1-p, 1), (a, \alpha), (\eta-p, 1); (c, \gamma) \\ \rho & (f, \phi) \\ & (b, \beta); (d, \delta) \end{array} \right] \quad (3\cdot1)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(g+2r)\, \Gamma(g+r)}{\Gamma(r+1)}\, {}_2F_1(-r, g+r; \eta; \zeta)$$

$$\times H^{l,\, n_1+1,\, n_2,\, m_1,\, m_2}_{E,\, [A+2\,:\,C],\, F,\, [B\,:\,D]} \left[\begin{array}{c|c} & (e, \theta) \\ \sigma & (1-p-r, 1)(a, \alpha), (g+r-p+1, 1); (c, \gamma) \\ \rho & (f, \phi) \\ & (b, \beta); (d, \delta) \end{array} \right],$$

जहाँ $Re\left(p+\frac{b_i}{\beta_i}\right)>0$, $i=1, \ldots, m_1$; $\lambda_1, \lambda_2>0$;

$\Psi_1, \Psi_2<0$; $|\arg \sigma| < \frac{\pi\lambda_1}{2}$, $|\arg \rho| < \frac{\pi\lambda_2}{2}$,

$Re(\zeta)>0$ तथा g ऋण विषम पूर्णांक नहीं है ।

(3·1) की स्थापना (2·1) तथा (1·1) की सहायता से तथा सक्सेना[3] द्वारा प्रयुक्त विधि के सम्प्रयोग से की जा सकती है ।

4. विशिष्ट दशायें

(i) (3·1) के प्राचलों के विशिष्टीकरण के द्वारा तथा (1·4), (1·5), (1·6) और (1.7) का उपयोग करने पर निम्नांकित परिणाम प्राप्त होते हैं :

$$\frac{\Gamma(\eta)}{\zeta p} F_1\left((e_1; p, 1-c_1; f_1; -\frac{\sigma}{\zeta}, -\rho\right) = \frac{\Gamma(f_1)}{\Gamma(e_1)\, \Gamma(p)\, \Gamma(1-c_1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(g+2r)\Gamma(g+r)}{\Gamma(r+1)} \quad (4.1)$$

$$\times {}_2F_1(-r, g+r; \eta; \zeta)\, H^{1,\,1,\,1,\,2,\,1}_{1,\,[2\,:\,1],\,1,\,[2\,:\,1]}\left[\begin{array}{c|c} \sigma & (e_1, 1) \\ & (1-p-r, 1), (g+r-p+1, 1); (c_1, 1) \\ \rho & (f_1, 1) \\ & (0, 1), (\eta-p, 1); (0, 1) \end{array}\right],$$

जहाँ $Re\,(p)>0$, $Re\,(\zeta)>0$, g ऋण विषम पूर्णांक नहीं है,

$$\left|\frac{\sigma}{\zeta}\right|>1 \text{ तथा } |\rho|<1.$$

$$\frac{\Gamma(\eta)}{\zeta^p} F_2\left(e_1; p, 1-c_1; b_2, d_2; -\frac{\sigma}{\zeta}, -\rho\right) \tag{4·2}$$

$$=\frac{\Gamma(d_2)\,\Gamma(b_2)}{\Gamma(e_1)\,\Gamma(p)\,\Gamma(1-c_1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(g+r)(g+2r)}{\Gamma(r+1)}\, {}_2F_2(-r, g+r; \eta; \zeta)$$

$$\times H^{1,\,1,\,1,\,2,\,1}_{1,\,[2\,:\,1],\,0,\,[3\,:\,2]}\left[\begin{array}{c|c} \sigma & (e_1, 1) \\ & (1-p-r, 1), (g+r-p+1, 1); (c_1, 1) \\ \rho & - \\ & (0, 1), (\eta-p, 1), (b_2, 1); (0, 1), (d_2, 1) \end{array}\right],$$

जहाँ $Re\,(p)>0$, $Re\,(\zeta)>0$, g ऋण विषम पूर्णांक नहीं है,

तथा $$\left|\frac{\sigma}{\zeta}\right|+|\rho|<1.$$

$$\frac{\Gamma(\eta)}{\zeta^p} F_3\left(p, 1-a_1; 1-c_1, 1-c_2; f_1; -\frac{\sigma}{\zeta}, -\rho\right) \tag{4·3}$$

$$=\frac{\Gamma(f_1)}{\Gamma(p)\Gamma(1-a_1)\Gamma(1-c_1)\Gamma(1-c_2)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(g+2r)\Gamma(g+r)}{\Gamma(r+1)}\, {}_2F_1(-r, g+r; \eta; \zeta)$$

$$\times H^{0,\,2,\,2,\,2,\,1}_{0,\,[3\,:\,2],\,1,\,[2\,:\,1]}\left[\begin{array}{c|c} \sigma & - \\ & (1-p-r, 1), (a_1, 1), (g+r-p+1, 1); (c_1, 1), (c_2, 1) \\ \rho & (f_1, 1) \\ & (0, 1), (\eta-p, 1); (p, 1) \end{array}\right],$$

जहाँ $Re\,(p)>0$, $Re\,(\zeta)>0$, g ऋण विषम पूर्णांक नहीं है,

$$\left|\frac{\sigma}{\zeta}\right|<1 \text{ तथा } |\rho|<1.$$

$$\frac{\Gamma(\eta)}{\zeta^{p}} F_4\left(e_1, e_2; b_2, d_2; -\frac{\sigma}{\zeta}, -\rho\right) \tag{4·4}$$

$$= \frac{\Gamma(1-d_2)\Gamma(1-b_2)}{\Gamma(e_1)\Gamma(e_2)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(g+2r)\,\Gamma(g+r)}{\Gamma(r+1)}\ {}_2F_1(-r, g+r; \eta; \zeta)$$

$$\times H^{2,\,1,\,0,\,2,\,1}_{2,\,[2\,:\,0],\,0,\,[4\,:\,2]}\left[\begin{array}{c|c} \sigma & (e_1, 1), (e_2, 1) \\ & (1-p-r, 1), (g+r-p+1, 1); - \\ \rho & - \\ & (0, 1), (\eta-p, 1), (b_2, 1), (1-p, 1); (0, 1), (d_2, 1) \end{array}\right],$$

जहाँ $Re\ (p)>0$, $Re\ (\zeta)>0$, $\left|\frac{\sigma}{\zeta}\right|^{1/2}+|\rho|^{1/2}<1$ तथा ऋण विषम पूर्णांक नहीं है ।

(ii) जब $E=l=F=0$ तो (3·1) [4, p. 187 (2·3)] के बल पर सक्सेना के फल [3, p. 64] में समानीत हो जाता है ।

(iii) जब $m_1=1=B$, $n_1=A=0$, $E=l=F=0$, तो H-फलन माइजर के G-फलन में और तत्समक [1, p. 207] के बल पर (3·1) एर्डेल्यी के सूत्र [1, p. 283 (7)] में समानीत हो जाता है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० आर० के० सक्सेना का अत्यन्त आभारी है जिन्होंने इस पत्र के लेखन में मार्ग दर्शन किया ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, इत्यादि, Higher Transcendental function. **भाग 1, मैकग्राहिल, न्यूयार्क**, 1953
2. मुनोट, पी० सी० तथा कल्ला, एस० एल०, Univ. Nac. Tucuman. Rev. Ser. 1971, **21** (A), 67-84
3. सक्सेना, आर० के०, Univ. Nac. Tucuman. Rev. Ser. 1971, **21** (A), 63-66
4. वही, वही, 1971, **21** (A), 185-191

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No 1, January, 1975, Pages 75-80

जोशी प्रभाव पर ताप की क्रिया तथा व्युत्क्रमण-विभव

जगदीश प्रसाद
रसायन विभाग, मेरठ कॉलेज, मेरठ

[प्राप्त—नवम्बर 11, 1974]

सारांश

हैलोजेनों में जोशी प्रभाव, $\pm\triangle i$ पर ताप (20—160°C) की क्रिया का अध्ययन किया गया है। ताप की उत्तरोत्तर बृद्धि से $+\triangle i$ पहले बढ़ा, फिर घटा और अंत में पुनः बढ़ा। इसका संबंध, बढ़े हुए ताप के कारण, वान्डर वाल्स परत के विशोषण, स्थिर V पर, परत की निर्मिति तथा इसके विशोषण से स्थापित किया गया है। ताप की उत्तरोत्तर बृद्धि से, $-\triangle i$ क्रमशः घटकर इसका $+\triangle i$ में व्युत्क्रमण हो गया। इसका संबंध ताप बृद्धि के कारण ऋण आयनों की अधिक अनासक्ति तथा $\pm\triangle i$ की सह-उपस्थिति के साथ स्थापित किया गया है। $V_{+\triangle i_{max}}$ तथा व्युत्क्रमण विभव दोनों ही ताप के साथ, $+\triangle i$ की भाँति, परिवर्तित होते हैं। इसकी व्याख्या $\pm\triangle i$ की सह-उपस्थिति के आधार पर की गई है।

Abstract

Influence of temperature on the Joshi effect and inversion potential. *By* Jagdish Prashad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Influence of temperature (20—160°C) on the Joshi effect $\pm\triangle i$ in halogens has been studied. $+\triangle i$ increased first, then decreased and finally increased as the temperature was increased gradually. This has been attributed to increased desorption of van der Waals layer, formation of layer and its desorption, at constant V, due to increased temperature. $-\triangle i$ decreased gradually and inverted to $+\triangle i$ with temperature. This has been attributed to the greater detachment of negative ions with temperaure and due to co-occurrence of $\pm\triangle i$. Both $V_{+\triangle i_{max}}$ and inversion potentials have shown a variation with temperature rise similar to that of $\pm\triangle i$. This has been explained on the basis of co-occurrence of $\pm\triangle i$.

$-\triangle i$ के आंकिक परिमाण की, किरणन तथा विद्युतीय उत्तेजन की प्रकृति सदृश क्रियाकारी अवस्थाओं पर विशिष्ट निर्भरता पर, तथा इसी प्रकार के तुलनात्मक दृष्टि से समान प्राचलों, यथा गैस दाब तथा ताप पर भी निर्भरता पर, इस अन्वेषण क्षेत्र के प्रारंभ से ही जोशी[1, 2] ने बल दिया है। अतः इसमें रुचि उत्पन्न हुई कि हैलोजनों में $-\triangle i$ पर ताप के प्रभाव का विस्तृत तुलनात्मक अध्ययन उत्तेजन तथा संसूचन की यथासंभव समान दशाओं के अन्तर्गत किया जाये। इन अन्वेषणों के महत्वपूर्ण परिणाम ये रहे हैं कि इनसे धनात्मक जोशी प्रभाव की उत्पत्ति पर ताप वृद्धि का अनुकूल प्रभाव तथा व्युत्क्रमण-विभव का ताप के साथ परिवर्तन की विद्यमानता प्रदर्शित होती है जिस पर कोई प्रकाशित आंकड़े उपलब्ध नहीं हैं ।

प्रयोगात्मक

पूर्व प्रकाशित लेखों[3, 4] में प्रयुक्त विधि का ही अनुसरण प्रस्तुत प्रयोग में किया गया। टॉपलर निर्वात के अन्तर्गत ओज़ोनित्र के वलयाकार स्थान में शोधित शुष्क क्लोरीन गैस/ब्रोमीन/आयोडीन वाष्प को प्रयोगशालीय ताप (20°C) तथा दाब (746 मिमी. Hg) पर प्रविष्ट किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

ताप के साथ V_m का परिवर्तन

जोशी[5, 6] ने विसर्जन अभिक्रियाओं के लिए सामान्यतः तथा विशेषतः $\triangle i$ अध्ययन के लिए V_m के मौलिक महत्व पर बल दिया है। उनके अनुसार[7, 8] यदि गैस का द्रव्यमान स्थिर रहता है तो, ताप में वृद्धि से V_m घट जाना चाहिए। प्रस्तुत अध्ययन से पता लगा है कि 20–100° से ताप-परास में V_m बढ़ता है, तत्पश्चात् 100–160° से ताप-परास में घटता है।

50 चक्र प्रति सेकंड सदृश कम आवृत्ति की ए० सी० के निम्नकोटि के अनुप्रयुक्त विद्युतीय क्षेत्रों का ताप बढ़ाने से, रासायनिक शोषित परत की निर्मिति के साथ-साथ वान्डर वाल्स परत का विशोषण होता है। क्योंकि निम्नकोटि के विद्युतीय क्षेत्र का प्रभाव अधिशोषण के लिए अनुकूल अधिक से अधिक क्रियाशील बिन्दुओं या क्षेत्रों का सृजन तथा ताप का प्रभाव उनकी अधिशोषकता को विनष्ट करना होता है, जब रासायनिक शोषित सतह पर एक साम्यावस्था निर्माण हो जाती है, तो रासायनिक शोषण की एक सीमा आ जाती है। अतः यह सीमा, अनुप्रयुक्त विभव के परिमाण और आवृत्ति तथा तापमान पर निर्भर है। इस चरम सीमा के परे, आवृत्ति या अनुप्रयुक्त विभव या ताप में और अधिक वृद्धि के कारण, विशोषण होने लगता है। प्रस्तुत परिणामों से प्रकट होता है कि 20-100° से० ताप-परास में, हैलोजनों के विद्युत् ऋणात्मक तत्वों या आयनों के अधिशोषण का प्राधान्य रहता है जिसके कारण V_m में प्रारंभिक वृद्धि का प्रेक्षण हुआ है।

100-160° से० परास में ताप की वृद्धि के साथ V_m में ह्रास, जोकि इलेक्ट्रोड सतह पर संभवतः विकृतिकारी प्रभाव स्थिर करता है, प्रतिपादित करता है कि इसका नियंत्रण सतह की प्रकृति की अवस्थाओं के द्वारा होता है। इसकी संपुष्टि इस तथ्य से होती है कि V_m पर विसर्जन अस्वपोषी प्रकृति

में परिवर्तित होता है ; स्वपोषी विसर्जन के लिए, इसकी स्थापना हो चुकी है कि, द्वितीयक उत्सर्जन-मुख्यत: कैथोड से धन आयनों (गामा-प्रक्रम) तथा फ़ोटॉन ($\eta \theta g$ क्रियाविधि) की बमवारी के द्वारा, महत्वपूर्ण होता है। इन प्रक्रमद्वय तथा इनके द्वारा कैथोड से इलेक्ट्रॉनों के उत्सर्जन का नियंत्रण कैथोड के कार्य-फलन ϕ से होता है। इससे गामा तथा $\eta \theta g$ प्रक्रमों को अपेक्षाकृत पर्याप्त निम्नकोटि के अनुप्रयुक्त क्षेत्र में होने के लिए सहायता मिल जाती है। यह इस तर्क का सुझाव देता है कि हैलोजन सदृश विद्युत् ऋणात्मक गैस के अधिशोषित परतों के विलोपन के द्वारा वृद्धिगत ताप कैथोड के कार्य-फलन को घटा देता है[10]।

ताप के साथ i का परिवर्तन

प्रेक्षित विसर्जन धारा, i का ताप के साथ कैथोड उपर्युक्त निगमन को प्रमाणित करता है। स्वपोषी विसर्जन में तात्क्षणिक धारा, एक चक्र में उत्पन्न अस्थायी कैथोड से मुक्त द्वितीयक इलेक्ट्रॉनों के द्वारा **ऐवेलांशों** की संख्या पर निर्भर होती है। इस अस्थायी कैथोड का ϕ, इलेक्ट्रॉनों की मुक्ति को नियंत्रित करता है। ϕ जितना ही कम होगा, उत्सर्जन उतना ही अधिक होगा। अतः उच्च ताप (100—160°C) पर i की वृद्धि, अधिशोषित गैसों के निष्कासन के कारण ϕ में हुए ह्रास पर आरोपित की जा सकती है। अस्तु, अधिशोषित गैसों का निष्कासन, इलेक्ट्रॉन मुक्ति को सहज करने के लिए, ϕ को घटा देता है, जो, जैसा कि वस्तुत: प्रेक्षण प्राप्त हुआ है, उच्च ताप पर धारा के मान को बढ़ा देता है।

ताप के साथ $\pm\triangle i$ का परिवर्तन

$\pm\triangle i$ पर उच्च ताप का प्रेक्षित अनुकूल प्रभाव, जोशी प्रभाव के रूपांतरित सिद्धांत[11] में वर्णित प्रथम अभिगृहीत का परिणाम है तथा प्रकाश-विद्युत्-उत्सर्जन के ज्ञात प्रभावों के यह अनुरूप है। वृद्धिगत ताप, जैसा कि ऊपर सिद्ध किया गया है, सीमांत परत के ϕ को घटा देता है, जिससे कि प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों की संख्या बढ़ जाती है। यह निर्बंध प्रकाशिक-इलेक्ट्रॉनों की संख्या में वृद्धि करता है ; फलत: उच्च ताप पर $\pm\triangle i$ बढ़ जाता है। जोशी के सिद्धांत अनुसार, ϕ का मान जितना कम होता जाता है, उतना ही सीमांत परत से इलेक्ट्रॉनों के प्रकाशिक उत्सर्जन, अतः $-\triangle i$, का मान बढ़ता जाता है। ताप की वृद्धि से, तथापि, $\triangle i$ पर्याप्त घट गया है। यदि जोशी की दृष्टि, कि विसर्जन के अन्तर्गत निर्मित सीमांत परत कम कार्य-फलन का होता है, को स्वीकार करलें, तो ताप की वृद्धि की $-\triangle i$ पर निरोधी प्रभाव की व्याख्या की जा सकती है। सीमांत परत से विमोचित प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों के बंधन के कारण ऋणात्मक प्रभाव होता है। बढ़े हुए ताप के द्वारा इलैक्ट्रोड से अधिशोषित फ़िल्म का निराकरण परत के कार्य-फलन में वृद्धि करता है, अतः $-\triangle i$ का निरोध करता है।

इस पर ध्यान देना होगा कि विविध दृश्य स्पेक्ट्रमी खंडों में अन्वेषित[9, 12] प्रकाश का प्रभाव निम्नांकित अ एवं आ दो तात्क्षणिक परिवर्तन उत्पन्न करता है, ये दोनों परिवर्तन तात्क्षणिक तथा प्रकाश-उत्क्रमणीय होते हैं: (अ) उच्च आवृत्ति के स्पंदनों में से कुछ के आयाम में ह्रास, तथा (आ) उनकी कुल संख्या में वृद्धि। (अ) के विषय में और अधिक सूचना प्राप्त करने के लिए, लिये गये ऑसिलोग्रामों के परीक्षण से प्रकट होता है कि किरणन पर आयाम का पराभव स्पष्टत: क्रम से एक के

बाद दूसरे उच्च आवृत्ति के स्पंदनों के साथ संबद्ध है, जोकि $-\triangle i$ की उपास्थिति का सूचक है। अथवा, (आ) की सह-उपस्थिति के कारण $-\triangle i$ का आंकिक दृष्टि से पराभव होगा, जिसको स्वयं $+\triangle i$ उत्पन्न करना चाहिए। अतः किन्हीं प्रदत्त अवस्थाओं के अन्तर्गत प्रकाश का नेट प्रभाव (अ) तथा (आ) के परिणामी पर निर्भर होगा, जिस मात्र का प्रदर्शन धारा संसूचक द्वारा होता है। अतएव, कैथोड को प्रयुक्त करते हुए, हैलोजेनों में प्रस्तुत अन्वेषणों में प्रेक्षित प्रभाव, ताप के साथ $+\triangle i$ तथा $-\triangle i$ दोनों के परिवर्तनों का नेट परिणाम मात्र है और इसको अकेले $+\triangle i$ या $-\triangle i$ से संबंधित नहीं किया जा सकता है।

अनेक प्रकाश-रासायनिक अभिक्रियाओं के ताप-गुणांकों पर दृष्टिपात[13, 14] करने से ज्ञात होता है कि ये प्रक्रियाएं ताप के लगभग अनाश्रित हैं तथा इनके मान एकांक के अत्यंत समीप हैं। हैलोजेनों के लिए प्रस्तुत अन्वेषणों में प्रेक्षित $\pm\triangle i$ का ताप पर विशिष्ट आश्रय तथा ताप-गुणांकों की एक बिल्कुल भिन्न कोटि (यद्यपि साम्य-स्थिरांकों से उनका मूल्यांकन नहीं किया गया है, दो भिन्न तापों पर $\pm\triangle i$ के अनुपात का परिमाण बढ़ते हुए $+\triangle i$ के लिए उच्च तथा घटते हुए $-\triangle i$ के लिए न्यून है) प्रकट करते हैं कि प्रस्तुत प्रकाश-प्रभाव-घटना प्रकाश-रासायनिक अभिक्रियाओं के विपरीत, $\pm\triangle i$ उत्तेजित गैस के द्वारा वरणात्मक प्रकाश अवशोषण से प्रतिबंधित नहीं है, के अनुरूप है।

जैसा कि पतली फ़िल्मों के संबंध में होता है,[15] ताप बढ़ने का प्रभाव अधिशोषित परत की मोटाई घटाने में होता है। कम V पर, ताप को बढ़ाने से, वान्डर वाल्स परत का शोषण होता है तथा साथ-साथ रासायनिक शोषित परत का निर्माण होता है। इसके परिणामस्वरूप पृष्ठीय ϕ पहले घटता है, तत्पश्चात् एक क्रांतिक सीमा तक ताप के साथ बढ़ता है। इसके फलस्वरूप $+\triangle i$, ताप के साथ, पहले बढ़ेगा, तत्पश्चात् घटेगा और फिर पुनः बढ़ेगा। सक्रियित अधिशोषण या काँच की सतह के सोडियम परमाणुओं के साथ रासायनिक पारस्परिक क्रिया से पृष्ठीय यौगिकों को बनाने के फलस्वरूप पृष्ठीय कार्य-फलन में वृद्धि के कारण, अति उच्च ताप पर $+\triangle i$ में पुनः ह्रास होता है। यहाँ पर यह उल्लेख अप्रासांगिक न होगा कि रिडील पारस्परिक क्रिया अथवा लांगम्युइर-हिंशेलवुड क्रियाविधि ϕ में परिवर्तनों के करने में असमर्थ है, क्योंकि वे काल-प्रक्रियाएं हैं तथा वर्तमान अन्वेषणों में उनका कोई महत्व नहीं है। उरोक्त विवेचन से $+\triangle i$ – ताप वक्रों में प्राप्त द्वि-उच्चिष्ठ का कारण स्पष्ट है। सतह पर होने वाली उपर्युक्त प्रक्रियाओं में, अतः ϕ में, लघु परिवर्तनों के कारण, $+\triangle i$ के प्रेक्षित परिवर्तन के लिए ताप परास में तनिक परिवर्तन संभाव्य है।

समान प्रकार से विचार करने पर पता लगेगा कि $V>V_m$ पर $-\triangle i$ भी उपर्युक्त प्रकार से परिवर्तित होना चाहिए, किन्तु बढ़े हुए ताप से प्रभावित ऋण आयनों की निर्मिति की प्रायिकता का भी विचार करना है। स्थिर V पर ताप के बढ़ने के साथ ऋण आयनों की अनासक्ति की प्रायिकता बढ़ जाती है,[16, 17] इसका परिणाम ताप के साथ $-\triangle i$ में क्रमिक ह्रास में होता है। इस अंतिम तर्क के द्वारा तथा $\pm\triangle i$ की सह-उपस्थिति के कारण भी, स्थिर V पर, जैसा कि प्रस्तुत अन्वेषणों में आलेखित हुआ है, उच्च तापों पर $-\triangle i$ क्रमशः घटकर इसका $+\triangle i$ में प्रतीपन हो जायेगा।

विभिन्न तापों पर V के साथ $\pm\triangle i$ के परिवर्तन पर विचार करने के द्वारा, V_i तथा अधिकतम $+\triangle i$ के लिए विभव, $V_{+\Delta i_{max}}$ के ताप के साथ परिवर्तन की व्याख्या की जा सकती है। $+\triangle i$ वान्डर वाल्स परत के विशोषण के कारण होता है; यह V_m पर अधिकतम होता है जहाँ पर कि रासायनिक शोषण आरंभ होता है। अत: $V_{+\Delta i_{max}}$ को V_m के समान सिद्ध किया जा सकता है जिसपर कि वान्डर वाल्स परत का विशोषण अधिकतम होता है और रासायनिक शोषित परत की निर्मिति न्यूनतम होती है। अतएव, ताप के बढ़ाने से वान्डर वाल्स परत का विशोषण बढ़ता जायेगा तथा वर्धित $+\triangle i$ की ओर अग्रसर होता जायेगा। रासायनिकशोषण ह्रसित $+\triangle i$ की ओर अग्रसर होता जायेगा। जब ये दोनों प्रक्रियाएं साथ-साथ चल रही हों तो, $V=V_m$ पर रासायनिक शोषण के लिए अपेक्षाकृत अधिक अनुकूल होने के कारण अधिकतम $+\triangle i$ के लिए विभव-परास में बृद्धि की ओर अग्रसर होता है और इसलिए जैसे ताप बढ़ेगा $V_{+\Delta i_{max}}$ भी बढ़ जायेगा। जब ताप में बृद्धि अपेक्षाकृत अधिक होती है, तो रासायनिक शोषित परत का विशोषण होने से, $V_{+\Delta i_{max}}$ ह्रास की ओर अग्रसर होता है। उच्च ताप पर सक्रियित अधिशोषण के करण, $V_{+\Delta i_{max}}$ बढ़ जायेगा। अत: जैसा कि प्रस्तुत अन्वेषणों में प्रेक्षण हुआ है, $V_{+\Delta i_{max}}$ पहले बढ़ेगा, फिर घटेगा और अंत में पुन: बढ़ेगा; इसकी संपुष्टि $+\triangle i$ ताप वक्रों में प्राप्त द्वि-उच्चिष्ठ से होती है। $V_{+\Delta i_{max}}$ के ताप के साथ परिवर्तन के समान ही V_i का परिवर्तन होगा, क्योंकि V_i पर $+\triangle i=-\triangle i$, तथा $\pm\triangle i$ की सह-उपस्थिति के कारण भी, प्रतिबंध द्वारा नियंत्रण होता है।

इस से स्पष्ट है कि बाह्य किरणन के प्रति अधिशोषित प्रावस्था का आचरण, ताप अनुप्रयुक्त विभव दोनों के परिमाण के द्वारा नियंत्रित होता है; और जैसा कि जोशी के सिद्धांत पर लेखक के रूपांतरित अभिगृहीतों[11] के अन्तर्गत विचार किया गया है, अधिशोषित पृष्ठ की प्रकृति पृष्ठ को प्रदत्त तापीय तथा वैद्युत् दोनों प्रकार की ऊर्जाओं पर निर्भर होगी।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० वेनुगोपालन को सुझावों के लिए धन्यवाद देता है।

निर्देश

1. जोशी, एस० एस०, प्रेज़० ऐड०, केमि० सेक०, इंडियन साइं० कांग्रे०, 1943
2. जोशी, एस० एस० तथा देशमुख, जी० एस०, नेचर, 1941, **147**, 806
3. प्रसाद, जे०, **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका**, 1972, **15** (2), 79
4. मोहंती, एस० आर०, जर्न० इंडियन केमि० सोसा०, 1948, **25**, 557
5. जोशी, एस० एस०, ट्रांस० फ़ैराडे सोसा०, 1927, **23**, 227
6. जोशी, एस० एस०, ट्रांस० फ़ैराडे सोस०, 1929, **25**, 118

7. जोशी, एस० एस०, **करेंट साइंस,** 1938, **8**, 334

8. जोशी, एस० एस०, **करेंट साइंस,** 1946, **15**, 28

9. प्रसाद, जे०, **पी-एच० डी० थीसिस, काशी हिन्दू वि० वि०**, 1961

10. ह्यूज़िज़, ए० एल० तथा ड्यू ब्रिज, एल० ए०, Photoelectric Phenomena, 1932, **मैकग्रॉ हिल बुक कंपनी, न्यूयॉर्क**

11. प्रसाद, जे०, **विज्ञान परिषद् अनुसंधान पत्रिका**, 1973, **16**(**3**), 131

12. जाटार, डी० पी०, **जर्न० साइं० इंडस्ट्रि० रिस०**, 1950, **9B**; 283

13. बनर्जी, आर० सी० तथा धर, एन० आर०, **ज़ैड० ऐनोर्ग० ऐलजेम० केमि०,** 192 **134**, 1724

14. बनर्जी, आर० सी०, तथा धर, एन० आर०, **केमि० ऐब्स्ट्र०**, 1924, **18**, 2634

15. हल्वका, एफ़०, **ज़ीट्स० एफ़० फ़िज़ि०**, 1926, **38**, 589

16. मैस्से, एच० एम०, डब्लू०, 'Negative Ions', 1950 **कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस**

17. क्रेवथ, ए० एम०, **फ़िज़ि० रिव्यू,** 1929, **33**, 603

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 1, January 1975, Pages 81-83

कुछ क्षारीय मृदा ऑक्साइडों की जालक ऊर्जा

जे० डी० पाण्डेय तथा *कु० उमा रानी पन्त
रसायन विज्ञान विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय, इलाहाबाद
तथा
*राजकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय पिथौरागढ़, कुमायूँ विश्वविद्यालय

[प्राप्त—सितम्बर 1, 1974]

सारांश

पाँच क्षारीय मृदा धातुओं के ऑक्साइडों [BeO, CaO, SrO, BaO तथा MgO] की जालक ऊर्जा नये प्रकार की अन्योन्यक्रिया विभव द्वारा परिकलित की गई है। प्रस्तुत प्रणाली संपीड्यता आँकड़ों पर निर्भर नहीं करती है। परिकलित मानों की तुलना हगिंस तथा सकामोटो के सैद्धान्तिक मानों से की गई है। सम्भवतः इन ऑक्साइडों के प्रायोगिक मान साहित्य में उपलब्ध नहीं हैं।

Abstract

Lattice energies of some alkaline earth oxides. *By* J. D. Pandey and Km. Uma Rani Pant, Chemistry Department, Allahabad University.

Lattice energies of five alkline earth oxides (BeO, CaO, SrO, BaO, MgO) have been calculated by using a new type of interaction potential. The present method avoids the use of compressibility date. The calculated values are compared with the theoretical values of Huggins and Sakamoto. Experimental values for these oxides are not probably available in literature.

ऐसा प्रतीत होता है कि Be, Ca, Sr, Ba तथा Mg के ऑक्साइडों की जालक ऊर्जा के प्रायोगिक मान साहित्य में अप्राप्य हैं। सैद्धान्तिक मानों की गणना मेयर तथा मालबी[1], हगिंस तथा सकामोटो[2], सक्सेना आदि[3] गोहल तथा त्रिवेदी[4] और अन्य व्यक्तियों द्वारा की गई। उन्होंने प्रायोगिक आँकड़ों के $0°K$ पर विभिन्न अन्योन्यक्रिया की परिकल्पनाओं के द्वारा गणना की, जिन्हें प्रतिलोमी धातु घातांकी तथा गॉसियन विभव कहते हैं। गोहल तथा त्रिवेदी[5] ने लेनार्ड जान्स विभव ऊर्जा के फलन को कूलामपद के साथ लेकर जालक ऊर्जा ज्ञात की। इन क्रिस्टलों के $0°K$ पर प्रायोगिक संपीड्यता आँकड़े, जालक ऊर्जा की गणना को अनिश्चित सा प्रदर्शित करते हैं। प्रस्तुत टिप्पणी में हमने उपान्तरित गॉसियन[5] विभव

को मानकर तथा कच्छवा तथा सक्सेना के आणवीय स्थिरांक की सहायता से जालक ऊर्जा की गणना की है। संपीड्यता आँकड़ों का प्रयोग नहीं किया गया है।

उपान्तरित गॉसियन विभव के अनुसार दो आयनों के मध्य अन्योन्यक्रिया विभव $u(r)$ इस प्रकार प्रस्तुत किया गया है।

$$u_r = \frac{-e^2z^2}{r} + P \text{ exp. } (-kr^{3/2}) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

P तथा k स्थिरांक हैं तथा अन्य संकेतों का अपना साधारण महत्व है। समीकरण (1) से ज्ञात होता है कि विपरीत आवेश वाले विभिन्न आयनों j द्वारा आयन i की अन्योन्य क्रिया ऊर्जा इस प्रकार प्रस्तुत की जा सकती है—

$$\phi(r) = \frac{-e^2z^2}{r} + p \text{ exp. } (-kr^{3/2}) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

जहाँ p स्थिरांक है तथा r निकटतम आयनों के बीच की दूरी है। यदि $r = r_0$ तो $\frac{d\phi(r)}{dr} = 0$ अवस्था में स्थिरांक p इस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है—

$$p = \frac{2}{3} \frac{\alpha e^2z^2}{kr_0^{5/2}} \text{ exp. } (kr_0^{3/2}) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

द्वितीय स्थिरांक h समीकरण (1) द्वारा ज्ञात किया जा सकता है जबकि $r = r_0$ होने पर उपयुक्त अवस्था

$$\frac{\partial \, u(r)}{\partial r} = 0 \text{ तथा } \frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} = k_e \text{ हो,}$$

k_e तथा r_e क्रमशः बल स्थिरांक तथा आयनों के बीच की दूरी हैं। इन अवस्थाओं में

$$3k = \frac{5}{r_e^{3/2}} + \frac{2k_e \, r_e^{3/2}}{z^2e^2} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

प्राप्त होता है।

संसंजक ऊर्जा प्रति अणु, E, $\phi(r)$ से निम्न समीकरण के अनुसार सम्बन्धित है :

$$E = -[N\phi(r_0) + \phi_0]$$

r_0 निकटतम आयनों के बीच की दूरी है तथा ϕ_0 शून्य अंक ऊर्जा है।

समीकरण (5) संयुक्त समीकरणों (2),(3) तथा (4) पाँच क्षारीय मृदा धातु ऑक्साइडों के E के मान की गणना के लिये प्रयोग में लाये गये हैं। आवश्यकीय आँकड़े तथा परिगणित मान सारणी 1 में दिये गये हैं। तुलना हेतु केवल हुगिंस तथा सकामोटो के सैद्धान्तिक मान दिये गये हैं।

सारणी 1

	r_e 10^{-8} सेमी० निर्देश 3	k_e 10^5 डाइन/सेमी० निर्देश 3	r_0 10^{-8} सेमी० निर्देश 2	ϕ_0 K कैलोरी/अणु निर्देश 3	E कैलोरी K कैलोरी /अणु	E (हूगिस तथा सकामोटो)[2]
ScO	1·331	7·4597	1·6549	5·0	1207	1082
MgO	1·749	3·4602	2·106	4·0	941	938
SrO	1·921	3·3793	2·580	2·0	805	792
BaO	1·940	3·7601	2·770	2·0	767	746
CaO	1·910	2·8410	2·405	3·0	667·2	841

निर्देश

1. मेयर, जे० आई० तथा माल्बी, **जर्न० फिजि०**, 1932, **75**, 74.
2. हूगिस तथा सकामोटो, **जर्न० फिजि० सोसा० जापान**, 1957, **12**, 241.
3. माथुर, सक्सेना तथा कच्छवा, **प्रोसी० नेश० इन्स्टि० सोसा०**, 1965, **31A**, 354·
4. गोहल तथा त्रिवेदी, **इण्डि० जर्न० प्योर एप्ला० फिजि०**, 1967, **5**, 265·
5. गोहल, त्रिवेदी तथा पटेल, **इण्डि० जर्न० फिजि०**, 1967, **XLI**, 235·
6. कच्छवा तथा सक्सेना, **फिला० मैग०**, 1964, **8**, 1429.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 18, No 1, January, 1975, Pages 85-88

फूरिये-लागेर श्रेणी की चिज़ारो परम संकलनीयता

आर० एस० चौधरी
गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, बड़वानी

[प्राप्त—अप्रैल, 15 1974]

सारांश

इस शोध पत्र में हम फलन $f(x)$ की बिन्दु $x=0$ पर फूरिये-लागेर श्रेणी पर प्रथम कोटि चिज़ारो परम संकलनीयता से सम्बन्धित एक सरल प्रमेय सिद्ध करेंगे।

Abstract

Absolute Cesàro summability of Fourier-Laguerre series. *By* R. S. Choudhary, Department of Mathematics, Government College, Barwani.

In the present paper we discuss the absolute Cesàro summability of order one for Fourier-Laguerre series associated with a Lebesque-measurable function at the point $x=0$ of the interval $(0, \infty)$.

1. फलन $f(x)$ से सम्बन्धित फूरिये-लागेर श्रेणी निम्नलिखित है

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(x), \tag{1·1}$$

जहाँ

$$\Gamma(\alpha+1) \binom{n+\alpha}{n} a_n = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} f(x) L_n^{(\alpha)}(x)\, dx. \tag{1·2}$$

क्योंकि

$$L_n^{(\alpha)}(0) = \binom{n+\alpha}{n},$$

इसलिये

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(0)=\{\Gamma(\alpha+1)^{-1}\} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} f(y) L_n^{(\alpha)}(y)\, dy. \qquad (1\cdot3)$$

यह सरलता से देखा जा सकता है कि [1] श्रेणी $\Sigma u_n(x)$ जिसके nवें आंशिक योगफलों का अनुक्रम $\{S_n\}$ है, बिन्दु x पर संकलनीय $|C, 1|$ होगी, यदि

$$\Sigma \frac{1}{n} | S_n(x)-A | < \infty. \qquad (1\cdot4)$$

2. बिन्दु $x=0$ पर श्रेणी (1·1) की साधारण चिज़ारो संकलनीयता पर कागबेतलियांज [2] और फेगो [3, 4] का कार्य उल्लेखनीय है। इस शोध पत्र में इसी श्रेणी की प्रथम कोटि चिज़ारो परम संकलनीयता से संबंधित एक सरल परिणाम दिया जा रहा है।

$\phi(y)$ के द्वारा हम फलन

$$\{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1} e^{-y} [f(y)-A] y^{\alpha} \qquad (2\cdot1)$$

को दर्शायेंगे और निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे :

प्रमेय: $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$ के लिये बिन्दु $x=0$ पर श्रेणी (1·1) संकलनीय $|C, 1|$ होगी, यदि

$$\Phi(t) \equiv \int_0^t | \phi(y) | \, dy = O(t^{\alpha/2+3/4}), \; t \to 0 \qquad (2\cdot2)$$

$$\int_{\omega}^{n} |\phi(y)| \, e^{y/2} y^{-\alpha/2-3/4} \, dy = O(1), \qquad (2\cdot3)$$

$$\int_{n}^{\infty} | \phi(y) | \, e^{y/2} y^{-\alpha/2-7/12} \, dy = O(1) \qquad (2\cdot4)$$

3. प्रमेय को सिद्ध करने के लिये हमें निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1 : [(4), 175] माना कि α स्वेच्छ वास्तविक संख्या है तथा C और ω धनात्मक नियत अचर हैं, तो जैसे $n \to \infty$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} x^{-\alpha/2-1/4}\, O(n^{\alpha/2-1/4}), & c/n \leqslant x \leqslant \omega; \\ O(n^{\alpha}), & 0 \leqslant x \leqslant c/n. \end{cases}$$

प्रमेयिका 2 : [(4), 238] यदि α स्वेच्छ वास्तविक तथा $\omega>0$, $0<\eta<4$ है तो जैसे $n \to \infty$

$$\max e^{-x/2} x^{\alpha/2+1/4} \, | L_n^{(\alpha)}(x) | = \begin{cases} n^{\alpha/2-1/4}, & \omega \leqslant x \leqslant (4-\eta)n; \\ n^{\alpha/2-1/12}, & x \geqslant \omega. \end{cases}$$

4. **प्रमेय की उपपत्ति :** श्रेणी (1·1) का बिन्दु $x=0$ पर nवाँ आंशिक योगफल

$$S_n=\{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1}\int_0^\infty e^{-y}\, y^\alpha f(y) \sum_{m=0}^{m=n} L_m^{(\alpha)}(y)\, dy,$$

$$=\{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1}\int_0^\infty e^{-y}\, y^\alpha f(y)\, L_n^{(\alpha+1)}(y)\, dy. \tag{4·1}$$

$f(0)=A$ लिखने पर और लागेर पालिनामियल्स के लाम्बिक गुण का उपयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$S_n-A=\int_0^\infty \phi(y)\, L_n^{(\alpha+1)}(y)\, dy.$$

हम समाकलन के परिसर को निम्न चार भागों में बाँटेंगे :

$$S_n-A=\int_0^{c/n}+\int_{c/n}^{\omega}+\int_\omega^n+\int_{c/n}^\infty \tag{4·2}$$

$$=\text{माना कि, } I_1+I_2+I_3+I_4,$$

जहाँ ω एक घनात्मक नियत अचर है।

अब

$$| I_1 | = O(1)\int_0^{c/n} | \phi(y) |\, | L_n^{(\alpha+1)}(y) |\, dy$$

$$=O(n^{\alpha+1})\int_0^{c/n} | \phi(y) |\, dy$$

$$=O(n^{\alpha+1})(1/n^{\alpha/2+3/4}),\ \text{(2·2) के अनुसार}$$

$$=O(n^{\alpha/2+1/4}). \tag{4·3}$$

पुनः प्रमेयिका 1 का उपयोग करने पर

$$| I_2 | = O(n^{\alpha/2+1/4})\int_{cn}^{\omega} | \phi(y) |\, y^{-\alpha/2-3/4}\, dy$$

$$=O(n^{\alpha/2+1/4})\Big[\Phi(y)\, y^{-\alpha/2-3+4}\Big]_{c/n}^{\omega}+O(n^{\alpha/2+1/4})\int_{c/n}^{\omega}\Phi(y)\, y^{-\alpha/2-7/4}\, dy$$

$$=O(n^{\alpha/2+1/4})+O(n^{\alpha/2+1/4})\Big[\log y\Big]_{c/n}^{\omega}$$

$$=O(n^{\alpha/2/+1/4})+O(n^{\alpha/2+1/4})(\log n)$$

$$=O(n^{\alpha/2+1/4})(\log n). \tag{4·4}$$

अब, प्रमेयिका 2 का उपयोग करने पर

$$| I_3 | = O(n^{\alpha/2+1/4}) \int_{\omega}^{n} | \phi(y) | e^{y/2} y^{-\alpha/2-3/4} dy$$

$$= O(n^{\alpha/2+1/4}), \text{ (2.3) के अनुसार} \quad (4\cdot5)$$

अन्त में प्रमेयिका 2 के दूसरे भाग से

$$| I_4 | = O(n^{\alpha/2+5/12}) \int_{n}^{\infty} | \phi(y) | e^{y/2} y^{-\alpha/2-3/4} dy$$

$$= O(n^{\alpha/2+5/12}) \int_{0}^{\infty} | \phi(y) | \frac{e^{y/2} y^{-\alpha/2-7/12}}{y^{1/6}} dy$$

$$= O(n^{\alpha/2+1/4}) \int_{n}^{\infty} | \phi(y) | e^{y/2} y^{-\alpha/2-7/12} dy$$

$$= O(n^{\alpha/2+1/4}), \text{ (2·4) के अनुसार} \quad (4\cdot6)$$

(4·3), (4·4), (4·5) और (4·6) को मिलाने पर

$$| S_n - A | = O(n^{\alpha/2+1/4}) \log n,$$

प्राप्त होता है जिसके फलस्वरूप यह स्पष्ट है कि

$$\sum_{n=1}^{n=m} \frac{| S_n - A |}{n} = O(1) \sum_{n=1}^{n=m} \frac{n^{\alpha/2+1/4} \log n}{n}$$

$$= O(1), \text{ क्योंकि } \alpha < -\tfrac{1}{2}.$$

इस प्रकार प्रमेय उपपन्न हो जाता है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रोफेसर धर्म प्रकाश गुप्ता का आभारी है जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में मार्ग दर्शन किया।

निर्देश

1. भट्ट, एस० एन०, **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका**, 1959, **2**, 73-74
2. कागबेतलियाँज, **सी० आर० एकेडेमी, साइंस पेरिस**, 1931, **193**, 386-389
3. झेगो, जी०, **मैथ० जर्न०**, 1926, **25**, 87-115
4. झेगो जी०, Orthogonal Polynomial. 1959

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 18 | अप्रैल 1975 | संख्या 2

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 2, April, 1974, Pages, 89-94

फूरिये-लागेर श्रेणी की संकलनीयता-$|N, p_n|$ के स्थानीय गुणधर्म का एक स्वरूप

आर० एस० चौधरी
गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, बड़वानी

[प्राप्त—अप्रैल 15, 1974]

सारांश

इस शोध पत्र का उद्देश्य अन्तराल $[0, \infty]$ के $x=0$ पर फूरिये-लागेर श्रेणी की संकलनीयता-$|N, p_n|$ की स्थानीयकरण समस्या का अध्ययन करता है।

Abstract

An aspect of local property of summability-$|N, p_n|$ of Fourier Laguerre series. *By* R. S. Choudhary, Department of Mathematics, Government College, Barwani.

The object of this paper is to study the problem of localisation of summability $|N, p_n|$ for the Fourier-Laguerre series at the frontier point $x=0$ of the linear interval $[0, \infty]$.

1 : माना कि Σa_n एक अनन्त श्रेणी है जिसके आंशिक योगों का अनुक्रम $\{s_n\}$ है। श्रेणी को नारलुंड संकलनीयता (Nörlund summability) से योज्य (summable) कहा जाता है, यदि

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} s_k \to s, \; n \to \infty \tag{1·1}$$

जहाँ कि
$$P_n = \sum_{v=0}^{v=n} p_v, \; p_v > 0.$$

यदि अनुक्रम $\{s_n\}$ परिसीमित विचरण का हो तो श्रेणी को परम संकलनीय कहा जाता है। विशिष्ट स्थिति में जब

$$p_n = \binom{n+\alpha-1}{\alpha-1} = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma\alpha}, \; (\alpha > 0)$$

नारलुंड औसत महत्वपूर्ण चिज़ारो औसत में बदल जाता है।

फलन $f(x)$ से सम्बन्धित फूरिये-लागेर श्रेणी निम्नलिखित है

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(x), \tag{1·2}$$

जहाँ कि

$$\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n} a_n = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha f(x) \; L_n^{(\alpha)}(x) \; dx,$$

और $L_n^{(\alpha)}(x)$, $\alpha > -1$ लागेर बहुपद है जो कि निम्नलिखित जनक फलन द्वारा परिभाषित है

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) \; \omega^n = (1-\omega)^{-\alpha-1} \cdot \exp\left(-\frac{x\omega}{1-\omega}\right).$$

हमने मान लिया है कि

$$\int_0^x e^{-x} x^\alpha f(x) \; dx < \infty, \tag{1·3}$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha f(x) \; L_n^{(\alpha)}(x) \; dx < \infty. \tag{1·4}$$

इस शोध पत्र का उद्देश्य अन्तराल $[0, \infty]$ के बिन्दु $x=0$ पर श्रेणी (1·2) के लिये संकलनीयता-$|N, p_n|$ के स्थान निर्धारण से सम्बन्धित विषय पर शोध पत्र लिखना है। इस विषय की प्रेरणा फूरिये-जैकोबी श्रेणी की परम संकलनीयता से सम्बन्धित गुप्ता[1] के नये परिणामों से मिली है। प्रथम प्रमेय में हम संकलनीयता-$|N, p_n|$ के स्थान निर्धारण के सम्बन्ध में विवेचना करेंगे। इसका एक महत्वपूर्ण निष्कर्ष यह है कि श्रेणी (1·2) की संकलनीयता-$|c, k|$, $k > \frac{1}{2}\alpha + 5/4$, बिन्दु $x = \infty$ के लघु सामीप्य में फलन के क्रम पर कुछ प्रतिबन्धों के अंतर्गत, बिन्दु $x=0$ के लघु सामीप्य में जनक फलन के व्यवहार पर निर्भर करती है। प्रमेय 2 में हम घोषणा करते हैं कि बिन्दु $x=0$ पर श्रेणी (1·2) की संकलनीयता-$|c, \alpha/2+3/4|$ एक स्थायी गुणधर्म है। परम चिज़ारो संकलनीयता के सामंजस्य प्रमेय (2) से स्पष्ट है कि संकलनीयता-$|c, k|$, $k < \frac{1}{2}\alpha + 3/4$ एक अस्थानीय गुणधर्म है।

हम निम्नलिखित दो प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 1 : यदि $\{p_n\}$ एक अनुक्रम अनृणात्मक (non negative) एकदिष्ट (monotonic) अविस्तीर्णमान (non increasing) इस प्रकार है कि

$$\Sigma \frac{n^{\alpha/2+1/4}}{P_n} < \infty, \tag{1·5}$$

तब श्रेणी की संकलनीयता-$|N, p_n|$ बिन्दु $x=0$ के लघु समीप्य में फलन के व्यवहार पर निर्भर करती है, जहाँ $\alpha > -1$ और

$$\int_{\eta}^{\infty} e^{-t/2}\, t^{\alpha-1/12}\, |f(t)|\, dt < \infty. \tag{1.6}$$

प्रमेय 2 : बिन्दु $x=0$ पर श्रेणी (1·2) की संकलनीयता-$|c, \frac{1}{2}\alpha+\frac{3}{4}|$ एक स्थानीय गुणधर्म नहीं है। यदि यह भी मान लिया जाय कि फलन $f(x)$ बिन्दुओं $x=0$ तथा $x=\infty$ के लघु समीप्य में शून्य है, तो भी यह आवश्यक नहीं है कि श्रेणी बिन्दु $x=0$ पर संकलनीय होगी।

2. यहाँ हम विभिन्न लेखकों द्वारा सिद्ध किये गये कुछ ऐसे परिणामों को उद्धृत कर रहे हैं, जिनकी हमें आगे चलकर आवश्यकता पड़ेगी।

प्रमेयिका 1[3] **:** मानाकि $S_n=\sum_{m=0}^{m=n} a_m$. यदि $\{p_n\}$ एक अनुक्रम अनृणात्मक, एकदिष्ट अविस्तीर्णमान इस प्रकार है कि

$$\Sigma_n \frac{|s_n|}{P_n} < \infty, \tag{2·1}$$

तब श्रेणी Σa_n संकलनीय $|N, p_n|$ होगी।

प्रमेयिका 2[2] **:** यदि श्रेणी Σa_n संकलनीय-$|c, r|$, $r \geqslant 0$ है तो श्रेणी

$$\Sigma \frac{|a_n|}{n^r} \tag{2·2}$$

अभिसारी होगी।

प्रमेयिका 3 : (5, p. 196) माना कि α एक वास्तविक स्वेच्छ अचर है, तो

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{x/2} x^{-\alpha/2-1/4} n^{\alpha/2-1/4} \cos\{2(nx)^{1/2} - \alpha^{\pi/2-\pi/4}\} + O(n^{\alpha/2-3/4}),\ x>0, \tag{2·3}$$

शेषफल के लिये परिबद्ध अन्तराल $[0, \infty]$ में एकसमान रूप से लागू होता है।

प्रमेयिका 4 : (5, p. 237) यदि α और λ स्वेच्छ तथा वास्तविक संख्याएँ हैं, $a>0$ और $0<\eta<4$ हैं, तो जैसे $n \to \infty$

$$\text{Max}\ \ e^{-x/2} x^{\lambda} \left| L_n^{(\alpha)}(x) \right| \sim n^{Q}$$

$$Q = \begin{cases} \text{Max}\ (\lambda-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}),\ a \leqslant x \leqslant (4-\eta)n; \\ \text{Max}\ (\lambda-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}),\ x \geqslant a. \end{cases} \tag{2·4}$$

प्रमेयिका 5 : माना कि $f_n(x)$ अन्तराल (a, b) में एक मापनीय (Measurable) फलन है जहाँ $b-a \leqslant \infty$ $n=1, 2, 3 \ldots$ हर एक फलन $\phi(x)$ के लिये जो कि (a, b) में समाकलनीय है फलन $f_n(x)\,\phi(x)$ अन्तराल (a, b) में समाकलनीय होंगे और श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_a^b f_n(x)\,\phi(x)\,dx\right|$$

अभिसारी होगी, के लिये आवश्यक एवं प्रर्याप्त प्रतिबन्ध यह है कि $\Sigma\,|f_n(x)|$ आवश्यक रूप से परिसीमित हो।

3 : प्रमेय 1 की उपपत्ति :

यह सरलता से देखा जा सकता है कि बिन्दु $x=0$ पर श्रेणी (1·2) का nवाँ आंशिक योग

$$s_n(0)=\{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1}\int_0^{\infty} e^{-y}\,y^{\alpha} f(y)\sum_{m=0}^{n} L_m^{(\alpha)}(y)\,dy$$

$$=\{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1}\int_0^{\infty} e^{-y}\,y^{\alpha} f(y)\,L_n^{(\alpha+1)}(y)\,dy$$

लिखें

$$s_n(0)=s_n=\int_0^{\eta}+\int_{\eta}^{\infty}$$

$$=s_{n,\,1}+s_{n,\,2}$$

जहाँ कि η एक नियत अचर है। इस प्रकार से अनुक्रम $\{s_n\}$ संकलनीय $|N, p_n|$ होगा यदि अनुक्रम $s_{n,\,1}$ तथा $s_{n,\,2}$ संकलनीय $|N, p_n|$ है। प्रमेय को सिद्ध करने के लिये यह दिखाना पर्याप्त होगा कि अनुक्रम $\{s_{n,\,2}\}$ संकलनीय $|N, p_n|$ है। प्रमेयिका 1 के अनुसार यह तब होगा, यदि हम सिद्ध करें कि

$$\Sigma\,\frac{|s_{n,\,2}|}{P_n}<\infty.$$

अब

$$|s_{n,\,2}|=\left|\left\{\Gamma(\alpha+1)\right\}^{-1}\int_{\eta}^{\infty} e^{-t}\,t^{\alpha} f(t)\,L_n^{(\alpha+1)}(t)\,dt\right|$$

$$=O(1)\int_{\eta}^{\infty} e^{-t/2}\,t^{\alpha-1/12}\,|f(t)|\,e^{-t/2}\,t^{1/12}\left|L_n^{(\alpha+1)}(t)\right|dt$$

$$=O(n^{\alpha/2+1/4})\int_{\eta}^{\infty} e^{-t/2}\,t^{\alpha-1/12}\,|f(t)|\,dt,$$

सम्बन्ध (2·4) से $\lambda=1/12$ चुनने पर

$$=O(n^{\alpha/2+1/4}),\ (1\cdot6) \text{ के अनुसार}$$

प्राक्कलन के अनुसार

प्रमेय 1 से यह निष्कर्ष निकलता है कि बिन्दु $x=0$ पर श्रेणी (1·2) की संकलनीयता $|c, k|$, $k>\frac{1}{2}\alpha+5/4$ एक स्थानीय गुणधर्म है। प्रमेय 2 में सिद्ध करते हैं कि $|c, k|$, $k\leqslant\frac{1}{2}\alpha+3/4$ एक अस्थानीय गुणधर्म है। इन दोनों परिणामों की बीच की खाईं को जोड़ना किसी अन्वेषक के लिये एक आनन्ददायक प्रश्न है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रोफेसर धर्म प्रकाश गुप्ता का आभारी है जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में मार्ग दर्शन किया।

निर्देश

1. गुप्त, डी० पी, **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1971, **4**, 337-345.
2. कागबेतलीयांज, ई०, **बुले०डेस साइन्सेस माथेमाटिक**, 1925, **49**, 234-256.
3. भट्ट, एस० एन०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंसेस इंडिया**, 1962, **28**, 787-794.
4. कागबेतलीयांज. ई०, **मेमोरियल डेस साइंस मैथ०**, 1931, **51**
5. झेगो, जी०, **आर्थोगोनल पालिनामियल्स**, 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 2, April, 1975, Pages 95-100

सार्वीकृत बेटमान फलन के विभिन्न संवलन परिवर्तों के कतिपय सम्बन्ध

बी० के० जोशी
गणित विभाग, राजकीय इंजीनियरी तथा प्रौद्योगिकी महाविद्यालय, रायपुर

[प्राप्त—अक्टूबर 30, 1973]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में सार्वीकृत बेटमान फलन वाले विभिन्न संवलन परिवर्तों के मध्य कतिपय पारस्परिक सम्बन्ध प्राप्त किये गये हैं ।

Abstract

Some relations between different convolution transforms of a generalized Bateman function *By* B. K. Joshi, Department of Mathematics, Government College of Engineering and Technology, Raipur.

Some mutual relations between different convolution transforms involving generalized Bateman function have been obtained.

1. विषय प्रवेश

कई फलनों वाले समाकल परिवर्त के लिये प्रतिलोमन समाकलों का अध्ययन कई शोधकर्ताओं ने किया है । [1-4, 6-10] बुशनमान[2] ने मेलिन परिवर्त की विचारधारा का और विडर[10] ने संक्रियात्मक फलन की विधियों का उपयोग किया है । इसके लिये एर्डेल्यी[4] ने रुडिग्रे सूत्र की विधि का सम्प्रयोग किया है ।

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य सार्वीकृत बेटमान फलन के विभिन्न संवलन परिवर्तों के मध्य कतिपय पारस्परिक सम्बन्ध प्राप्त करना है । इसके लिये विडर की विधि प्रयुक्त की गई है ।

फलन $f(t)$ का लैप्लास परिवर्त

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = F(p),\ Re\, p > 0 \tag{1·1}$$

द्वारा दिया जाता है। (1·1) को हम सांकेतिक रूप में

$f(t) \doteq F(p)$ द्वारा व्यक्त करेंगें।

निम्नांकित फल ज्ञात हैं (5; p 129, 128, 182, 195, 238) और उन्हें इसी क्रम से प्रयुक्त किया जावेगा

$$e^{at} f(t) \doteq F(p-a) \tag{1·2}$$

$$t^n \mathcal{J}_n(at) \doteq (2a)^n \sqrt{\{(n+\tfrac{1}{2})\}} \pi^{-1/2} (p^2+a^2)^{-(n+1/2)} \tag{1·3}$$

$$t^n I_n(at) \doteq (2a)^n \sqrt{\{(n+\tfrac{1}{2})\}} \pi^{-1/2} (p^2-a^2)^{-(n+1/2)} \tag{1·4}$$

$$t^{-1} \mathcal{J}_n(at) \doteq \frac{a^n}{n} [p+(p^2+a^2)^{1/2}]^{-n} \tag{1·5}$$

$$t^{-1} I_n(at) \doteq \frac{a^n}{n} [p+(p^2-a^2)^{1/2}]^{-n} \tag{1·6}$$

$$\mathcal{J}_n(at) \doteq a^n (p^2+a^2)^{-1/2} [p+(p^2+a^2)^{1/2}]^{-n} \tag{1·7}$$

$$I_n(at) \doteq a^n (p^2-a^2)^{-1/2} [p+(p^2-a^2)^{1/2}]^{-n} \tag{1·8}$$

$$\frac{t^{2\lambda+2\nu-1}}{\sqrt{(2\lambda+2\nu)}} \, {}_1F_2 [\nu; \lambda+\nu, \lambda+\nu+\tfrac{1}{2}; -\tfrac{1}{4}a^2t^2] \doteq p^{-2\lambda}(p^2+a^2)^{\nu}, \quad Re\ (\lambda+\nu)>0 \tag{1·9}$$

सार्वीकृत बेटमान फलन को इस प्रकार परिभाषित करेंगें :

$$K_n^l (x) = \int_0^{\pi/2} (2 \cos \theta)^l \cos (x \tan \theta - n\theta) \, d\theta \tag{1·10}$$

जहाँ $l>1$

चक्रवर्ती[3] का फल निम्नवत् है

$$e^{-1/2t} K_{2n}^{2l} (\tfrac{1}{2}t) \doteq (-1)^{n-l-1} p^{n-l-1}(p+1)^{-(n+l+)}$$

यदि $(n-l-1)$ तथा $(n+l)$ शून्य सहित ऐसी अनृण पूर्ण संख्यायें हों कि $2l>-1$

प्रमेय 1 A

यदि a वास्तविक हो, m, $(n-l-1)$ तथा $(n+l)$ ऐसी अनृण पूर्ण संख्यायें हों कि $l>-\frac{1}{2}$,

$$f_1(x) = \int_0^x e^{-1/2(x-t)} K_{2n}^{2l} [\tfrac{1}{2}(x-t] \, g(t) \, dt \tag{2·1}$$

तथा

$$f_2(x) = \int_0^x \frac{e^{-(x-t)}}{(x-t)} \mathcal{J}_m [a(x-t)] \, g(t) \, dt \tag{2·2}$$

तो $$f_1(x)=\frac{(-1)^{n-l-1}ma^{-m}}{\sqrt{(m+n+l+1)}}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-l-1}\left[\int_0^x e^{-(x-t)}\,(x-t)^{m+n+l}\right.$$

$$\left.\times {}_1F_2\left[\frac{m+r}{2};\ \frac{m+n+l+1}{2},\ \frac{m+n+l+2}{2};\ -\tfrac{1}{4}a^2(x-t)^2\right]f_2(t)\,dt\right] \quad (2\cdot3)$$

उपपत्ति :

माना कि $$f_1(x)\doteq F_1(p)$$

$$f_2(x)\doteq F_2(p)$$

तथा $$g(x)\doteq G(p)$$

(2·1) तथा (2·2) लैप्लास परिवर्त लेने पर, भाग देने तथा पुनर्व्यवस्थित करने पर

$$p^{-(n-l-1)}F_1(p)=(-1)^{n-l-1}ma^{-m}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(p+1)^{-(n+l-r+1)}[(p+1)^2+a^2]^{-(m+r)/2}F_2(p)$$

लैप्लास प्रतिलोमन से निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\frac{1}{\sqrt{(n-l-1)}}\int_0^x (x-t)^{n-l-2}f_1(t)\,dt=$$

$$\frac{(-1)^{n-l-2}m}{a^m\sqrt{(m+n+l+1)}}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\left[\int_3^x e^{-(x-t)}(x-t)^{m+n+l}\right.$$

$$\left.\times {}_1F_2\left[\frac{m+r}{2};\ \frac{m+n+l}{2},\ \frac{m+n+l+1}{2};\ -\tfrac{1}{4}a^2(x-t)^2\right]f(t)\,dt\right]$$

$(n-l-1)$ बार उत्तरोत्तर अवकलन से (2·3) की स्थापना होती है।

प्रमेय 1 B :

यदि a वास्तविक हो, m, $(n-l-1)$ तथा $(n+l)$ ऐसी अनृण पूर्ण संख्यायें हों कि $2l>-1$

$$f_1(x)=\int_0^x e^{-1/2(x-t)}\,K_{2n}^{2l}\,[\tfrac{1}{2}(x-t)]\,g(t)\,dt \quad (2\cdot4)$$

तथा $$f_2(x)=\int_0^x \frac{e^{-(x-t)}}{(x-t)}\,I_m\,[a(x-t)]\,g(t)\,dt \quad (2\cdot5)$$

तो $$f_1(x)=\frac{(-1)^{n-l-1}ma^{-m}}{\sqrt{(n+m+l+1)}}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-l-1}\left[\int_0^x e^{-(x-t)}(x-t)^{m+n+l}\right.$$

$$\left.\times {}_1F_2\left[\frac{m+r}{2};\ \frac{m+n+l+1}{2},\ \frac{m+n+l+2}{2},\ \tfrac{1}{4}a^2(x-t)^2\right]f_2(t)\,dt\right] \quad (2\cdot6)$$

इसे प्रमेय 1 A की ही तरह सिद्ध किया जा सकता है।

प्रमेय 2 A :

यदि a वास्तविक हो, m, $(n-l-1)$ तथा $(n+l)$ ऐसी अनृण पूर्ण संख्या हों कि $2l>-1$

$$f_1(x)=\int_0^x e^{-1/2\cdot(x-t)} K_{2n}^{2l}\left[\tfrac{1}{2}(x-t)\right] g(t)\, dt \tag{2·7}$$

तथा

$$f_2(x)=\int_0^x e^{-(x-t)} J_m[a(x-t)]\, g(t)\, dt \tag{2·8}$$

तो

$$f_1(x)=(-1)^{n-l-1}e^{-m}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{1}{\sqrt{(n+l-m-2r)}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-l-1}\left[\int_0^x e^{(x-t)}\right.$$

$$\times(x-t)^{l+n-m-2r-1}\,{}_1F_2\left[-\frac{m+r+1}{2};\ \frac{n+l-m-2r}{2},\ \frac{n+l-m-2r+1}{2};\right.$$

$$\left.\left.-\tfrac{1}{4}a^2(x-t)^2\right]f_2(t)\, dt\right] \tag{2·9}$$

यदि $(n+l)>3m$.

प्रमेय 2 B :

यदि a वास्तविक हो, $(n-l-1)$, $(n+l)$ तथा m ऐसी अनृण पूर्ण संख्यायें हों कि $2l>-1$

$$f_1(x)=\int_0^x e^{-1/2(x-t)} K_{2n}^{2l}\left[\tfrac{1}{2}(x-t)\right] g(t)\, dt \tag{2·10}$$

तथा

$$f_2(x)=\int_0^x e^{-(x-t)} I_m[a(x-t)]\, g(t)\, dt \tag{2·11}$$

तो

$$f_1(x)=(-1)^{n-l-1}a^{-m}\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{1}{\sqrt{\{(n+l-m-2r)\}}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-l-1}\left[\int_0^x e^{-(x-t)}\right.$$

$$\times(x-t)^{n+l-m-2r-1}\,{}_1F_2\left[-\frac{m+r+1}{2};\ \frac{n+l-m-2r}{2},\ \frac{n+l-m-2r+1}{2};\right.$$

$$\left.\left.\tfrac{1}{4}a^2(x-t)^2\right]f_2(t)\, dt\right] \tag{2.12}$$

क्योंकि $(n+l)>3m$

यह उपपत्ति प्रमेय 1 A की ही भाँति है।

प्रमेय 3 A :

यदि a वास्तविक हो, m, $(n-l-1)$ तथा $(n+l)$ ऐसी ग्रनृण पूर्ण संख्यायें हों कि $2l>-1$, $(n+l)>2m$

$$f_1(x)=\int_0^x e^{-1/2(x-t)}\ K_{2n}^{2l}\ [\tfrac{1}{2}(x-t)]\ g(t)\ dt \tag{2·13}$$

तथा

$$f_2(x)=\int_0^x e^{-(x-t)}(x-t)^m\ \mathcal{J}_m[a(x-t)]\ g(t)\ dt \tag{2·14}$$

तो

$$f_1(x)=\frac{(-1)^{n-l-1}\ (2a)^{-m}\ \pi^{1/2}}{\sqrt{\{(m+\frac{1}{2})\}}\sqrt{\{(n+l-2m)\}}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-l-1}\left[\int_0^x e^{-(x-t)}\ (x-t)^{n+l-2m-1}\right.$$

$$\left.\times{}_1F_2\left[-(m+\tfrac{1}{2});\frac{n+l-2m}{2},\ \ \frac{n+l-2m+1}{2};\ -\tfrac{1}{4}a^2(x-t)^2\right]f_2(t)\ dt\right] \tag{2·15}$$

प्रमेय 3 B:

यदि a वास्तविक हो, m, $(n-l-1)$ तथा $(n+l)$ ऐसी अनृण पूर्ण संख्यायें हों कि $2l>-1$ $(n+l)>2m$;

$$f_1(x)=\int_0^x e^{-1/2(x-t)}\ K_{2n}^{2l}\ [\tfrac{1}{2}(x-t)]\ g(t)\ dt \tag{2·16}$$

तथा

$$f_2(x)=\int_0^x e^{-(x-t)}\ (x-t)^m\ I_m\ [a(x-t)]\ g(t)\ dt \tag{2·17}$$

तो

$$f_1(x)=\frac{(-1)^{n-l-1}\ \pi^{1/2}\ (2a)^{-m}}{\sqrt{(m+\frac{1}{2})}\sqrt{(n+l-2m}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-l-1}\left[\int_0^x e^{-(x-t)}\ (x-t)^{n+l-2m-1}\right.$$

$$\left.\times{}_1F_2\left[-(m+\tfrac{1}{2});\ \frac{n+l-2m}{2},\ \ \frac{n+l-2m+1}{2};\ \tfrac{1}{4}a^2(x-t)^2\right]f_2(t)\ \ dt\right] \tag{2·18}$$

इन प्रमेयों को प्रमेय A की भाँति सिद्ध किया जा सकता है।

निर्देश

1. भारतीय, पी० एल०, **जर्न० इंडि० मैथ० सोसा०**, 1964, **28**, 163-67
2. बुशमान, आर० जी०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1962, **13**, 675-77
3. चक्रवर्ती, एन० के०, **बुले० कल० मैथ० सोसा०**, 1953, **45**, 1-7
4. एर्डेल्यी, ए०, **ग्रमे० मैथ० मंथली०**, 1963, **70**, 65

5. वही, Tables of Integral Transforms. भाग 1, मैकग्राहिल 1954

6. जोशी, बी० के०, **मैथमैटिक्स स्टुडेण्ट** (प्रकाशनाधीन)

7. खांडेकर, पी० आर०, Journ. De. Math. Pures. 1965, 195-197

8. रुसिया, के० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया**, 1969, **39**, 331-36

9. श्रीवास्तव, के० एन०, **प्रोसी० ग्लास० मैथ० एसो०**, 1966, **7**, 125-27

10. विडर, डी० वी०, **अमे० मैथ० मंथली**, 1963, **70**, 291-93

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 2, April 1975, Pages 101-114

जैकोबी श्रेणी का अन्तिम बिन्दु परम संकलनीयता गुणक

सरजू प्रसाद यादव
गणित तथा सांख्यिकी अध्ययनशला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—दिसम्बर 17, 1974]

सांराश

उपयुक्त गुणक की सहायता से अन्तिम बिन्दु $\theta=0$ पर जैकोबी श्रेणी की परम संकलनीयता की विवेचना की गई है।

Abstract

End point absolute summability factor of Jacobi series. *By* Sarjoo Prasad Yadav, School of Studies in Mathematics and Statistics, Vikram University, Ujjain.

Absolute summability of Jacobi series at end point $\theta=0$ has been discussed with the help of a suitable factor.

1. माना कि $f(x)$ लेबेस्क मापनीय फलन है जो परास $-1\leqslant x\leqslant 1$ के लिये परिभाषित है। $x=\cos\theta$ के लिये $f(x)$ के संगत जैकोबी श्रेणी

$$f(\cos\theta)\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha,\ \beta)}(\cos\theta)\equiv\Sigma\, U_n \text{ माना} \tag{1·1}$$

द्वारा दी जाती है जहाँ

$$a_n=\frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\cdot\frac{\Gamma(n+1)\ .\ \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\ .\ \Gamma(n+\beta+1)}\int_0^{\pi}(1-\cos w)^{\alpha}(1+\cos w)^{\beta}\ P_n^{(\alpha,\ \beta)}(\cos w)\ .f(\cos w)\ .\sin w\, dw \tag{1·2}$$

$P_n^{(\alpha,\ \beta)}(\cos\theta)$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$ (α,β) कोटि का n वाँ जैकोबी बहुपद है और (1·2) में समाकल की अवस्थिति मान लीं गई है।

हम निम्न प्रकार लिखेंगे :

$$f(w)=\{f(\cos w)-A\} \tag{1·3}$$

$$T_n^{\delta}=\frac{1}{A_n^{\delta}}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-1}\, g_\nu\, P_\nu^{(\alpha,\beta)}(1)\, P_\nu^{(\alpha,\beta)}(\cos w)\,,\ \sin w.$$

$$L_\nu^{\delta}=\frac{1}{A_n^{\delta}}\sum_{k=0}^{\nu} A_{n-k}^{\delta-1}\, g_k\, P_k^{(\alpha,\beta)}(1)\, P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos w)\,.\ \sin w;\ (n>\nu)$$

$$g_\nu=\frac{2\nu+\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\cdot\frac{\Gamma(\nu+1)\,.\,\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\,.\,\Gamma(\nu+\beta+1)}\sim 0(\nu)$$

$$g_{n,\,\alpha}=\frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\sim 0(n^{\alpha+1})$$

श्रेणी (1·1) की सामान्य चिज़ारो संकलनीयता का अध्ययन पाण्डेय[1] ने किया है । यहाँ पर हम उपयुक्त गुणक की सहायता से अन्तिम विन्दु $\theta=0$ पर श्रेणी (1·1) की परम संकलनीयता की व्याख्या करेंगे । पाण्डेय[1] ने निम्नांकित प्रमेय सिद्ध किया है ।

प्रमेय A

श्रेणी (1·1) संकलनीय (C, k) है क्योंकि $\theta=0$ पर $\alpha-\frac{1}{2}<k<\alpha+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$, $\beta\geqslant\alpha$ बशर्ते कि

$$f(w)\in \text{lip}^*\ (\alpha+\tfrac{1}{2}-k) \tag{1·4}$$

2. हम निम्नांकित प्रमेय सिद्ध करेंगे ।

प्रमेय

यदि $\{\lambda_n\}$ ऐसा अवमुख अनुक्रम हो कि $\Sigma\, n^{-1}\lambda_n$ अभिसारी हो तो श्रेणी $\Sigma\{a_n\,.\,P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)\,.\,\lambda_n\}$, $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$, $\beta\geqslant\alpha$ बिन्दु $\theta=0$ पर संकलनीय $|C,\delta|$, $1<\delta<2$ है बशर्ते

$$f(w)\in \text{lip}\ (2-\delta) \tag{2·1}$$

इस प्रमेय की उपपत्ति पाण्डे[1] के प्रमेय में पती[2] के प्रमेय के सम्प्रयोग से प्राप्त होती है । यहाँ हम इस प्रमेय की प्रत्यक्ष उपपत्ति देंगे । उपपत्ति पूरा करने के लिये हमें निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी ।

प्रमेयिका 1

(झेगो [3] पृष्ठ 196)

$$P_n^{(\alpha,\ \beta)}(\cos\theta)=\begin{cases} n^{-1/2}k(\theta)\{\cos(N\theta+\gamma)+(n\sin\theta)^{-1}\,.\,0(1)\} \\ \qquad \text{यदि } c/n\leqslant\theta\leqslant\pi-c/n \\ n^{-1/2}k(\theta)\cos(N\theta+\gamma)+0(n^{-3/2}) \\ \qquad \text{यदि } \epsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\epsilon,\ \epsilon>0 \text{ किन्तु स्थिर हो} \end{cases} \tag{2·2}$$

जहाँ $k(\theta)=\pi^{-1/2}(\sin\theta/2)^{-\alpha-1/2}\,.\,(\cos\theta/2)^{-\beta-1/2};\ N=n+\frac{\alpha+\beta+1}{2},\ \gamma=-(\alpha+\frac{1}{2})\pi/2$

प्रमेयिका 2

(झेगो [3] पृष्ठ 167)

$$P_n^{(\alpha,\ \beta)}(\cos\theta)=\begin{cases}\theta^{-\alpha-1/2}\,0(n^{-12}), & c/\leqslant\theta\leqslant\pi/2\\ 0(n^{\alpha}), & 0\leqslant\theta\leqslant c/n;\end{cases} \tag{2·3}$$

जहाँ α, β काल्पनिक हैं तथा C एक स्थिर धन अचर है।

प्रमेयिका 3

यदि $\gamma_n\leqslant w\leqslant\pi-1/n$, $(\gamma_n\geqslant1/n)$, तथा E_n और G_n क्रमशः E के वास्तविक तथा काल्पनिक अंश हैं जहाँ

$$E\equiv\{M(w)\}e^{-\pi/2\,i\,(\alpha+1/2)}\int_{-\infty}^{w}(w-t)^{-\alpha-3/2}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{\delta-2}\cdot$$

$$\{e^{i(\nu+\alpha+\beta/2+1)w}-e^{i(\nu+(\alpha+\beta/2+1)t}\}\,dt$$

$$M(w)=(\sin w/2)^{-\alpha-1/2}(\cos w/2)^{-\beta+1/2}$$

तो

$$T_n^{\delta}=(A_n^{\delta})^{-1}E_n+(A_n^{\delta})^{-1}G_n+0(n^{\alpha-3/2})(\sin w/2)^{-\alpha-3l2}(\cos w/2)^{-\beta-1/2}$$

उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि

$$T_n^{\delta}=(A_n^{\delta})^{-1}\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{\delta-2}\,g_{\nu,\ \alpha}\cdot(\nu+1)^{-1/2}(\sin w/2)^{-\alpha-3/2}(\cos w)^{-\beta-1/2}$$

$$\{\cos(N\,w+\gamma)\cdot\sin w+0(\nu+1)^{-1}\}$$

[3]

[देखें भेगो[3] पृष्ठ 71]

$$=(\overset{\delta}{A_n})^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\delta-2}{A_{n-\nu}} \left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)^{\alpha+1/2} (\sin w/2)^{-\alpha-1/2} . (\cos w/2)^{-\beta+1/2}$$

$$. \cos\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right) w . \cos(\alpha+\tfrac{1}{2})\pi/2$$

$$+(\overset{\delta}{A_n})^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\delta-2}{A_{n-\nu}} \left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)^{\alpha+1/2} (\sin w/2)^{-\alpha-1/2}(\cos w/2)^{-\beta+1/2}$$

$$. \sin\left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right) w . \sin(\alpha+\tfrac{1}{2})\pi/2$$

$$+0(n^{\alpha-3/2}) . (\sin w/2)^{-\alpha-3/2} . (\cos w/2)^{-\beta-1/2}$$

यह ज्ञात है[1] कि

$$\int_{-\infty}^{w} (w-t)^{-\alpha-3/2}\{e^{i(\nu+\alpha+\beta/2+1)w}-e^{i(\nu+\alpha+\beta/2+1)t}\} dt$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha)}{\alpha+\frac{1}{2}} . \left(\nu+\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)^{\alpha+1/2} e^{i(\nu+\alpha+\beta/2+1)w} . e^{i(\alpha+1/2)\pi/2}$$

उपर्युक्त में इस मान को रखने पर सम्बन्ध (2·4) प्राप्त होता है।

प्रमेयिका 4

$\gamma_n \leqslant w \leqslant \pi-1/n : (\gamma_n \geqslant 1/n)$, के लिये हमें ज्ञात है कि

$$E=M(w) . e^{-i\pi/2(\alpha+1/2} . e^{i(n+\alpha+\beta/2+1)w} . \psi(w) \tag{2·5}$$

जहाँ

$$\psi(w)=\int_{0}^{\infty} u^{-\alpha-3/1} [K_n(w)-K_n(w-u)e^{-i(n+\alpha+\beta/2+1)u}] du \tag{2·6}$$

तथा

$$K_n(w)=\sum_{m=0}^{n} \overset{\delta-2}{A_m} e^{-imw} \tag{2·7}$$

उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि

$$E=M(w) e^{i\pi/2(\alpha+1/2)} . I$$

जहाँ

$$I=\int_{-\infty}^{w} (w-t)^{-\alpha-3/2} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-2} \{e^{i(\nu+\alpha+\beta/2+1)w}-e^{i(\nu+\alpha+\beta/2+1)t}\}\, dt$$

समाकल I में $w-t=u$ रखने पर हमें

$$I=\int_{0}^{\infty} u^{-\alpha-3/2} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-2} \{e^{i(\nu+\alpha+\beta/2+1)w}-e^{i(\nu+\alpha+\beta/2+1)(w+u)}\}\, du$$

$$=e^{i(n+\alpha+\beta/2+1)w}\int_{0}^{\infty} u^{-\alpha-3/2}\, [K_n(w)-K_n(w-u)e^{-i(n+\alpha+\beta/2+1)u}]\, du$$

प्राप्त होता है। अतः सम्बन्ध (2·5) प्राप्त होता है।

प्रमेयिका 5

हमें ज्ञात है कि

$$\psi(w)=0(n^{\alpha+1/2})w^{1-\delta} \tag{2·8}$$

तथा

$$\psi(w+\mu_n)-\psi(w)=0(^{\delta+\alpha-3/2}\,.\,\log n\,.\,w^{-1}). \tag{2·9}$$

$$:\left(\mu_n=\frac{\pi}{n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1}\right)$$

उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि

$$K_n(y)=\sum_{m=0}^{n} A_m^{\delta-2}\, e^{-imy}.$$

स्पष्ट है कि

$$K_n(t)=0(n^{\delta-1})$$

$$K_n'(t)=0(n^{\delta}).$$

और भी

$$K_n(t)=(1-e^{-it})^{1-\delta}-\sum_{m=n+1}^{\infty} A_m^{\delta-2}\, e^{-imt}$$

अतः

$$K_n'(t)=0(n^{\delta-1}t^{-1});\ (n^{-1}\leqslant t\leqslant\pi)$$

$$K_n''(t)=0(n^{\delta}\ .\ t^{-1});\ (n^{-1}\leqslant t\leqslant\pi)$$

अब, माना कि

$$\psi(w)=i_1+i_2+i_3+i_4+i_5.$$

जहाँ

$$i_1=\int_0^{1/n} u^{-\alpha-3/2}\ [K_n(w)-e^{-i(n+\alpha+\beta/2+1)u}\ .\ K_n(w-u)]\ du$$

$$i_2=\int_{1/n}^{\infty} u^{-\alpha-3/2}\ .\ K_n(w)\ du$$

तथा

$$i_3+i_4+i_5=-\left\{\int_{1/n}^{w-1/n}+\int_{w-1/n}^{w+1/n}+\int_{w+1/n}^{\infty}\right\} u^{-\alpha-3/2}\ .\ e^{-i(n+\alpha+\beta/2+1)}\ .\ K_n(w-u)\ du.$$

अब

$$i_1=\int_0^{1/n} u^{-\alpha-1/2}\left\{\frac{d}{d\xi}\ e^{i(n+\alpha+\beta/2+1)\xi}\ K_n(w-\xi)\right\} du \quad : (0\leqslant\xi\leqslant u)$$

$$=0\left[\int_0^{1/n} u^{-\alpha-1/2}\{n(w-\xi)^{1-\delta}+n^{\delta-1}(w-\xi)^{-1}\}\ du\right]$$

$$=0(n^{\alpha+1/2}\ .\ w^{1-\delta})$$

$$i_2=0(n^{\alpha+1/2}\ w^{1-\delta})$$

$$i_3=0(n^{\alpha+1/2}\ w^{1-\delta})$$

और भी

$$i_4=0(n^{\alpha+1/2})\ w^{1-\delta}.$$

पुनश्च

$$i_5=\int_{w+1/n}^{\pi}+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1\pi}$$

$$=\int_{w+1/n}^{\pi} u^{-\alpha-3/2}\,(u-w)^{1-\delta}\ du+\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+\alpha+\beta/2+1)u}\ .\ K_n(w-u)$$

$$.\ \sum_{m=1}^{\infty} e^{-i(n+\alpha+\beta/2+1)2m\pi}\ .\ (u+2m\pi)^{-\alpha-3/2}\ .\ du$$

$$=0(n^{\alpha+1/2}\,.\,w^{1-\delta})+0\int_{-\pi}^{w-1/n}(w-u)^{1-\delta}\,du+\int_{w-1/n}^{w+1/n}n^{\delta-1}\,du+\int_{w+1/n}^{\pi}(u-w)^{1-\delta}\,du$$

$$=0(n^{\alpha+1/2}\,.\,w^{1-\delta})$$

अतः हमें

$$\psi(w)=0(n^{\alpha+1/2})\,.\,w^{1-\delta}$$

प्राप्त होगा ।

अब $\psi(w+\mu_n)-\psi(w)=e_1+e_2+e_2+e_4+e_5$, माना

जहाँ

$$e_1=\mu_n\int_0^{1/n}u^{-\alpha-3/2}\,[K_n'(t)-e^{-i(n+\alpha+\beta/2+1)u}\,.\,K_n'(t-u)],\,du \qquad (w\leqslant t\leqslant w+u)$$

$$=\mu_n\int_0^{1/n}u^{-\alpha-1/2}\left[\frac{d}{d\xi}\{e^{-i(n+\alpha+\beta/2+1)\xi}\,.\,K_n'(t+\xi)\}\right]du \qquad : 0\leqslant\xi\leqslant u.$$

$$=0(\mu_n)\int_0^{1/n}u^{-\alpha-1/2}\left[n\,.\,n^{\delta-1}(t+\xi)^{-1}+n^{\delta}(t+\xi)^{1-1}\right]du$$

$$=0(n^{\alpha+\delta-3/2}\,.\,w^{-1})$$

$$e_2=\int_{1/n}^{\infty}u^{-\alpha-3/2}\,[K_n(w+\mu_n)-K_n(w)]\,du$$

$$=\mu_n\int_{1/n}^{\infty}u^{-\alpha-3/2}\,K_n'(w)\,du$$

$$=0(n^{\delta+\alpha-3/2})\,.\,w^{-1}$$

$$e_3=-\int_{1/n}^{w-1/n}u^{-\alpha-3/2}\,.\,e^{-i(n+\alpha+\beta/2+1)u}\,.\,\{K_n(w+\mu_n-u)-K_n(w+u)\}\,du$$

$$=0(\mu_n)\int_{1/n}^{w-1/n}u^{-\alpha-3/2}\,.\,K_n'(w-u)\,du$$

$$=0(\mu_n)\int_{1/n}^{w-1/n}u^{-\alpha-3/2}\,.\,n^{\delta-1}\,(w-u)^{-1}\,du$$

$u=wv$, रखने पर

$$e_3=0(n^{\delta-2}\,.\,w^{-\alpha-3/2})\int_{(nw)^{-1}}^{1-(nw)^{-1}}V^{-\alpha-3/2}\,.\,(1-v)^{-1}\,dv$$

$$=0(n^{\alpha+\delta-3/2}\,.\,w^{-1}\,.\,\log n)$$

इसी प्रकार

$$e_4 = -\mu_n \int_{w-1/n}^{w+1/n} u^{-\alpha-3/2} \,.\, e^{-i(n+\alpha+\beta/2+1)u} \,.\, K_n(w-u)\, du$$

$$= 0(n^{\delta+\alpha-3/2} \,.\, w^{-1})$$

$$e_5 = -\mu_n \int_{w+1/n}^{\pi} u^{-\alpha-3/2} \,.\, e^{-i(n+\alpha+\beta/2+1)u} \,.\, K_n^{'}\,(w-u)\, du$$

$$-\mu_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+\alpha+\beta/2+1)u} \,.\, K_n^{'}\,(w-u) \,.\, \left[\sum_{m=1}^{\infty} e^{-i(n+\alpha+\beta/2+1)2m\pi} \,.\, (u+2m\pi)^{-\alpha-3/2}\right] du$$

$$= 0(\mu_n) \int_{w+1/n}^{\pi} u^{-\alpha-3/2} \,.\, n^{\delta-1}(u-w)^{-1}\, du + 0(1)$$

$$= 0(n^{\alpha+\delta-3/2} \,.\, w^{-1} \,.\, \log n).$$

फलस्वरूप हमें

$$\psi(w-\mu_n) - \psi(w) = 0(n^{\alpha+\delta-3/2} \,.\, w^{-1} \,.\, \log n).$$

प्राप्त होगा। अतः प्रमेयिका सिद्ध हुई।

प्रमेयिका 6

माना कि $\gamma_n \leqslant w \leqslant \pi - 1/n$, $(\gamma_n \geqslant 1/u)$ तथा $\overset{1}{E_n}$ और $\overset{1}{G_n}$ क्रमशः E' के वास्तविक तथा कल्पनिक अंश हैं जहाँ

$$E^1 = M(w) e^{-i\pi/2(\alpha+1/2)} \int_{-\infty}^{w} (w-t)^{-\alpha-3/2} \sum_{k=0}^{\nu-1} A_{n-k}^{\delta-2} \,. \qquad (2\cdot10)$$

$$\{e^{i(k+\alpha+\beta/2+1)w} - e^{i(k+\alpha+\beta/2+1)t}\}\, dt$$

$$M(w) = (\sin w/2)^{-\alpha-1/2} \,.\, (\cos w/2)^{-\beta+1/2}$$

तो

$$\overset{\delta}{L_\nu} = (\overset{\delta}{A_n})^{-1} \overset{1}{E_n} + (\overset{\delta}{A_n})\, \overset{1}{G_n} + 0[n^{-\delta} \,.\, \nu^{\alpha+\delta-3/2} \,.\, (\sin w/2)^{-\alpha-3/2} \,.\, (\cos w/2)^{-\beta-1/2}] \qquad (2\cdot11)$$

इस प्रमेयिका की उपपत्ति प्रमेयिका 3 की तरह ही है।

प्रमेयिका 7

$$\gamma_n \leqslant w \leqslant \pi - 1/n,\ (\gamma_n \geqslant 1/n),\ \mu_n = \frac{\pi}{n + \frac{\alpha+\beta}{2} + 1} \text{ के लिये}$$

$$E^1 = 0\{M(w)\}\ e^{-i\pi/2(\alpha+1/2}\ .\ e^{i(n+\alpha+\beta/2+1)w}\ .\ \phi(w).$$

प्राप्त है जहाँ

$$\phi(w) = \int_0^\infty u^{-\alpha-3/2}\ [K_n(w) - e^{-i(n+\alpha+\beta/2+1)u}\ .\ K_n(w-u)]\ du$$

$$= 0(n^{\alpha+1/2})\ .\ w^{1-\delta}.$$

जहाँ $\left\{K_n(w) = \sum_{m=n-k+1}^{n} A_m^{\delta-2}\ .\ e^{-imw}\right\}$

तथा

$$\phi(w+\mu_n) - \phi(w) = (n^{\delta+\alpha-3/2}\ .\ w^{-1}\ .\ \log n)$$

इस प्रमेयिका की उपपत्ति प्रमेयिका 5 तथा 6 की भाँति है।

प्रमेय की उपपत्ति

माना कि $\overset{\delta}{\zeta_n}$ द्वारा क्रम $\{n\ .\ \lambda_n\ .\ U_n\}$ के δ कोटि के nवें चिज़ारो माध्य का अंकन किया जाता है। इस प्रमेय को सिद्ध करने के लिये श्रेणी $\Sigma_n\, n^{-1}\ |\ \overset{\delta}{\zeta_n}\ |$ का अभिसरण प्रदर्शित करना होगा।

हमें ज्ञात है कि

$$\overset{\delta}{\zeta_n} = \int_0^\pi (\sin w/2)^{2\alpha} (\cos w/2)^{2\beta} f(w) \left\{(\overset{\delta}{A_n})^{-1} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\delta-1}\ .\ \nu\ .\ \lambda_\nu\ .\ g_\nu.\right.$$

$$\left.\ .\ P_\nu^{(\alpha,\ \beta)}(1)\ .\ P_\nu^{(\alpha,\ \beta)}(\cos w)\ \sin w\right\} dw$$

ऐबेल रूपान्तर व्यवहृत करने पर

$$\overset{\delta}{\zeta_n} = \int_0^\pi (\sin w/2)^{2\alpha}\ (\cos w/2)^{2\beta} \left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta(\nu\lambda_\nu)\ \overset{\delta}{L_\nu} + n\lambda_n\ \overset{\delta}{T_n}\right\} . f(w)\ dw$$

$$= \int_0^{\gamma n} + \int_{\gamma n}^{\pi-1/n} + \int_{\pi-1/n}^{\pi};\ (\gamma_n \geqslant 1/_n)$$

$$= I_1 + I_2 + I_3, \text{ माना}$$

अब

$$I_1=\int_0^{\gamma n} f(w)\,.\,w^{2\alpha+1}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\Delta(\nu\lambda_\nu)\nu^{2\alpha+1}+n^{2\alpha+2}\,.\,\lambda_n\right\}dw$$

$\gamma_n=n^{-(2\alpha+2)(4+2\alpha-\delta)}$, चुनने पर

$$I_1=0\left[n^{-(2\alpha+2)}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-2}(\nu^{2\alpha+2}\,.\,\Delta\lambda_\nu+\nu^{2\alpha+1}\lambda_\nu)+n^{2\alpha+2}\lambda_n\right\}\right]$$

अत:

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-1}\mid I_1\mid=0\left[\sum_{n=1}^{m} n^{-(2\alpha+2)}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu^{2\alpha+2}\,.\,\Delta\lambda_n+\nu^{2\alpha+1}\lambda_\nu)\right\}+\sum_{n=1}^{m} n^{-1}\lambda_n\right].$$

$$=0\left[\sum_{\nu=0}^{m-1}(\nu^{2\alpha+2}\,.\,\Delta\lambda_\nu+\nu^{2\alpha+1}\lambda_\nu)\,.\sum_{n=\nu+1}^{m} n^{-2\alpha-3}\right]+0(1)$$

$$=0(1).$$

इसी प्रकार

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-1}\mid I_3\mid=0(1)$$

अब

$$I_2=\int_{\gamma n}^{\pi-1/n}(\sin w/2)^{2\alpha}\,.\,(\cos w/2)^{2\beta}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}\Delta\lambda_\nu\,.\,\nu\,\overset{\delta}{L_\nu}+\sum_{\nu=0}^{n-1}\lambda_\nu\,.\,\overset{\delta}{L_\nu}+n\lambda_n\,\overset{\delta}{T_n}\right\}f(w)\,.\,dw$$

प्रमेयिका 3, 4, 6 तथा 7 का उपयोग करते हुये समाकल को 9 भागों में प्रसारित किया गया है। समाकल के पूर्व हम R तथा I लिखकर क्रमश: वास्तविक अंश तथा काल्पनिक अंश को द्योतित करेंगे। फलस्वरूप

$$I_2=R\int_{\gamma n}^{\pi-1/n} f(w)(\sin w/2)^{2\alpha}(\cos w/2)^{2\beta}\,.\,M(w)\,.\,e^{-i\pi/2(\alpha+1/2)}\,.\,e^{i(n+\alpha+\beta/2+1)w}$$

$$.\,n^{-\delta}\,\psi(w)\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}(\Delta\lambda_\nu)\,.\,\nu\right\}dw$$

$$+I\int_{\gamma n}^{\pi-1/n} f(w)(\sin w/2)^{2\alpha}(\cos w/2)^{2\beta}\,M(w)e^{-i\pi/2\,.\,(\alpha+1/2)}\,.\,e^{i(n+\alpha+\beta/2+1)w}$$

$$.\,n^{-\delta}\,\psi(w)\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1}(\Delta\lambda_\nu)\,.\,\nu\right\}dw$$

$$+0\left\{\int_{\gamma n}^{\pi-1/n} f(w)\ (\sin w/2)^{\alpha-3/2}\ (\cos w/2)^{\beta-1/2}\ .\ n^{-\delta} \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta\lambda_\nu\ .\ \nu^{\alpha+\delta-1/2}\ .\ dw\right.$$

$$+R\int_{\gamma n}^{\pi-1/n} f(w)\ (\sin w/2)^{2\alpha}\ (\cos w/2)^{2\beta}\ .\ M(w)\ e^{-i\pi/2(\alpha+1/2)}\ .\ e^{i(n+\alpha+\beta/2+1)w}$$

$$.\ n^{-\delta}\ \psi(w) \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu\ .\ dw$$

$$+I\int_{\gamma n}^{\pi-1/n} f(w)\ (\sin w/2)^{2\alpha}\ (\cos w/2)^{2\beta}\ M(w)\ .\ e^{-i\pi/2}\ .\ ^{(\alpha+1/2)}\ .\ e^{i(n+\alpha+\beta/2+1)w}$$

$$.\ n^{-\delta}\ \psi(w) \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu\ .\ dw$$

$$+0\left\{\int_{\gamma n}^{\pi-1/n} f(w)\ (\sin w/2)^{\alpha-3/2}\ (\cos w/2)^{\beta-1/2}\ .\ n^{-\delta} \sum_{\nu=0}^{n-1} \nu^{\alpha+\delta-3/2}\ .\ \lambda_\nu\ .\ dw\right.$$

$$+R\int_{\gamma_n}^{\pi-1/n} f(w)\ (\sin w/2)^{2\alpha}\ (\cos w/2)^{2\beta}\ .\ M(w)\ e^{-i(\alpha+1/2)\pi/2}\ .\ e^{i(n+\alpha+\beta/2+1)w}$$

$$.\ n^{-\delta+1}\ .\ \lambda_n\ \psi(w)\ dw$$

$$+I\int_{\gamma n}^{\pi-1/2} f(w)\ .\ (\sin w/2)^{2\alpha}\ (\cos w/2)^{2\beta}\ .\ M(w)\ .\ e^{-i(\alpha+1/2)\pi/2}\ .\ e^{i(n+\alpha+\beta/2+1)w}$$

$$.\ n^{-\delta+1}\ .\ \lambda_n\ .\ \psi(w)\ dw$$

$$+0\left\{\int_{\gamma n}^{\pi-1/n} f(w)\ .\ (\sin w/2)^{\alpha-3/2}\ (\cos w/2)^{\beta-1/2}\ .\ n^{-\alpha-1/2}\ .\ \lambda_n\ dw\right\}$$

$=\sum_{i=1}^{9} I_{2\cdot 1}$ माना

अब $I_{2\cdot 1}$ के समाकल को निम्नांकित रूप में लिखा जा सकता है।

$I_{2\cdot 1}$ का समाकल

$$=\tfrac{1}{2}\left\{\int_{\gamma_n}^{\pi-1/n} f(w)\ .\ (\sin w/2)^{\alpha-1/1}\ (\cos w/2)^{\beta+1/2}\ .\ e^{i(n+\alpha+\beta/2+1)w} .\ \psi(w)\ dw\right.$$

$$-\int_{\gamma n-\mu_n}^{\pi-\mu n-1/n} f(w+\mu_n)\ .\left(\sin\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\alpha-1/2}\left(\cos\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\beta+1/2}\ .\ e^{i(n+\alpha\beta/2+1)w}$$

$$\left.\ .\ \psi(w+\mu_n)\ dw\right\};\left(\mu_n=\frac{\pi}{n+\frac{\alpha+\beta}{2}+1}\right)$$

$\leqslant\frac{1}{2}(L_1+L_2+L_3+L_4+L_5)$, माना

जहाँ

$$L_1=\int_{\gamma n-\mu n}^{\gamma n}\left|\left(\sin\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\alpha-1/2}\left(\cos\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\beta+1/2} f(w+\mu_n)\,.\,\psi(w+\mu_n)\right| dw$$

$$L_2=\int_{\pi-1/n-\mu n}^{\pi-1/n} \left| (\sin w/2)^{\alpha-1/2} (\cos w/2)^{\beta+1/2} f(w)\,.\,\psi(w)\right| dw$$

$$L_3=\int_{\gamma n}^{\pi-1/n-\mu n} |f(w+\mu_n)-f(w)|\,.\left(\sin\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\alpha-1/2}\left(\cos\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\beta+1/2} .\,|\psi(w+\mu_n)|\, dw$$

$$L_4=\int_{\gamma n}^{\pi-1/n-\mu n} |\psi(w+\mu_n)-\psi(w)|\,.\,|f(w)|\,.\left(\sin\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\alpha-1/2}\left(\cos\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\beta+1/2} dw$$

$$L_5=\int_{\gamma_n}^{\pi-1/n-\mu n}\left|\left(\sin\frac{w+\mu_n}{2}\right)^{\alpha-1/2}\left(\cos\frac{w+\mu^n}{2}\right)^{\beta+1/2}-(\sin w/2)^{\alpha-1/2} (\cos w/2)^{\beta+1/2}\right| .\,|f(w)|\,.\,|\psi(w)|\, dw$$

अब

$$L_1=0(n^{\alpha+1/2}\int_{\gamma n-\mu n}^{\gamma n} (w+\mu_n)^{\alpha-1/2}(w+\mu_n)^{1-\delta}\, dw$$

$$=0(n^{\delta-1}).$$

$$L_2=0(n^{\alpha+1/2})\int_{1/n}^{1/n+\mu n} |(\cos w/2)^{\alpha-1/2}(\sin w/2)^{\beta+1/2}|\,.\,|f(\pi-w)|\,.\,(\pi-w)^{1-\delta}\, dw$$

$$=0(n^{-1}) : (\beta\geqslant\alpha)$$

$$L_3=0\left[\mu_n^{2-\delta}\int_{\gamma_n}^{\pi-1/n-\mu n} (w+\mu_n)^{\alpha-1/2}\,.\,n^{\alpha+1/2}\,.\,(w+\mu)^{1-\delta}\, dw\right]$$

$$=0(n^{\alpha+\delta-3/2})\,.\,\{0(n^{-\alpha-3/2+\delta})+0(1)\}$$

$$=0(n^{\alpha+\delta-3/2})+0(n^{2\delta-3})$$

$$L_4=0(n^{\delta+\alpha-3/2}\,.\,\log n)\,.\int_{\gamma n}^{\pi-1/n-\mu n} \omega^{-1}\,.\,\omega^{2-\delta}\,.\,\omega^{\alpha-1/2}\, d\omega$$

$$=0(n^{2\delta-3}\,.\,\log n)+0(n^{\delta+\alpha-3/2}\,.\,\log n)$$

$$L_5=0\left[\mu_n\int_{\gamma n}^{\pi-1/n-\mu n}\left|\frac{d}{d\omega}\{\sin \omega/2)^{\alpha-1/2}(\cos \omega/2)^{\beta+1/2}\}\right|\,.\,|f(\omega)|\,.\,|\psi(\omega)|\,.\,d\omega\right.$$

$$=0\left[\mu_n\int_{\gamma n}^{\pi-1/n-\mu n} \mid \{(\cos\omega/2)^{\beta+1/2}(\sin\omega/2)^{\alpha-3/2}(\cos\omega/2)^{\beta-1/2}\}\mid .\right.$$

$$.\mid f(\omega)\mid . \mid \psi(\omega)\mid . d\omega$$

$$=0\left[\mu_n\int_{\gamma n}^{\pi/2}\omega^{\alpha-3(2} . \omega^{2-\delta} . n^{\alpha+1/2} . \omega^{1-\delta}\, d\omega\right.$$

$$+\mu^n\int_{\pi/2}^{\pi-1/n-\mu n} \mid (\sin w/2)^{\beta-1/2}\mid . \mid f(\omega)\mid . \mid \psi(\omega)\mid d\omega$$

$$=0(n^{2\delta-3})+0(n^{\alpha-1/2})$$

$$=0(n^{2\delta-3});\ (\alpha+\tfrac{3}{2}-2\delta<0)$$

अब हम देखते हैं कि

$$\sum_{r=1}^{m} n^{-1}\mid I_{2\cdot 1}\mid \leqslant \sum_{n=1}^{m} n^{-1-\delta}\sum_{\nu=0}^{n-1}(\Delta\lambda_\nu . \nu)\{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5\}$$

$$\leqslant \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5, \text{ माना,}$$

जहाँ

$$\Sigma_1=\sum_{n=1}^{m} n^{-2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\Delta\lambda_\nu . \nu$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}\Delta\lambda_\nu . \nu \sum_{n=\nu+1}^{m} n^{-2}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}\Delta\lambda_\nu$$

$$=0(1);$$

$$\Sigma_2=\sum_{n=1}^{m} n^{-2-\delta}\sum_{\nu=0}^{n-1}\Delta\lambda_\nu . \nu$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}\Delta\lambda_\nu . \nu \sum_{n=\nu+1}^{m} n^{-2-\delta}$$

$$=0(1)\sum_{\nu=0}^{m}\Delta\lambda_\nu=0(1)$$

$$\Sigma_3=\sum_{n=1}^{m} n^{-4+\delta}\sum_{\nu=0}^{n-1}\Delta\lambda_\nu . \nu+\sum_{n=1}^{m} n^{\alpha-5/2} . \log n\sum_{\nu=0}^{n}\Delta\lambda_\nu . \nu$$

$$=0(1),$$

$$\Sigma_4=\sum_{n=1}^{m} n^{-1-\delta+2\delta-3}\log n\sum_{\nu=0}^{n-1}\Delta\lambda_\nu\,.\,\nu+\sum_{n=1}^{m} n^{\alpha-5/2}\,.\,\log n\sum_{\nu-0}^{n-1}\Delta\lambda_\nu\,.\,\nu$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}\Delta\lambda_\nu\,.\,\nu\sum_{n=\nu+1}^{m} n^{\delta-4}\,.\,\log n+\sum_{\nu=0}^{m}\Delta\lambda_\nu\,.\,\nu\sum_{n=\nu+1}^{m} n^{\alpha-5/2}\,.\,\log n.$$

$$=0(1)\sum_{\nu=0}^{m}\Delta\lambda_\nu+0(1)\sum_{\nu=0}^{m}\Delta\lambda_\nu=0(1)$$

$$\Sigma_5=\sum_{n=1}^{m} n^{-1-\delta+2\delta-3}\sum_{\nu=0}^{n-1}\Delta\lambda_\nu\,.\,\nu$$

$$=\sum_{\nu=0}^{m}\Delta\lambda_\nu\,.\sum_{n=\nu+1}^{m} n^{\delta-4}$$

$$=0(1)\sum_{\nu=0}^{m}\Delta\lambda_\nu$$

$$=0(1).$$

I_2 के अन्य अंश भी $I_{2\cdot 1}$ की ही तरह आचरण करते हैं । अतः

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\,|\,I_2\,|=0(1)$$

इससे प्रमेय की उत्पत्ति पूरी हो जाती है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोध पत्र की तैयारी में डा० जी० एस० पाण्डेय ने जो परामर्श दिया उसके लिये लेखक उनका आभारी है ।

निर्देश

1. पाण्डेय, जी० एस०, इण्डि० जर्न० मैथ०, 1968, **10(2)**, 121-55

2. पती, टी०, ड्यूक मैथ० जर्न०, 1954, **21**, 271-83

3. झेगो, जी०, Orthogonal Polynomials कलोकियम पब्लि० अमे० मैथ० सोसा० न्यूयार्क, तृतीय संस्करण 1967

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 2, April, 1975, Pages 115-121

फाक्स के H-फलन वाले कतिपय समाकल सम्बन्ध

यदु नन्दन प्रसाद तथा ए० सिद्दीकी
संप्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—मार्च 1, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य दो मूलभूत समाकलों का मान ज्ञात करना है जिनका उपयोग फाक्स के H-फलन वाले कतिपय समाकल सम्बन्धों को निकालने में किया गया है। प्राप्त फल डहिया और प्रसाद तथा राम द्वारा प्राप्त फलों के सार्वीकरण हैं। प्राचलों के विशिष्टीकरण से कई नवीन फल व्युत्पन्न किये गये हैं।

Abstract

On some integral relations involving Fox's H-function. *By* Y. N. Prasad and A. Siddiqui, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

The aim of the present paper is to evaluate two basic integrals which have been used to evaluate some integral relations involving Fox's H-Function into its integrand. The results are the generalizations of the results given by Dahiya[1] and Prasad and Ram[5]. On specializing the parameters many new results have been derived.

1. विषय प्रवेश

फाक्स[3] ने मेलिन-बार्नीज़ प्रकार के कंटूर समाकल के रूप में H-फलन का सूत्रपात किया है जिसको सांकेतिक रूप से निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं।

$$H_{p,q}^{m,n}\left[x\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}\\\{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)}x^s\,ds \qquad (1{\cdot}1)$$

जहाँ $\{(f_r, \gamma_r)\}$ से प्राचलों के सेट $(f_1, \gamma_1), (f_2, \gamma_2), \ldots, (f_r, \gamma_r)$ का बोध होता है, x शून्य के बराबर नहीं है और रिक्त गुणनफल को इकाई के रूप में विवेचित किया जाता है, p, q, m, n पूर्णांक हैं जो $1 \leqslant m \leqslant q$; $0 \leqslant n \leqslant p$ की तुष्टि करते हैं; $\alpha_j (j=1, 2, \ldots, p)$; $\beta_j (j=1, 2, \ldots, q)$ धन संख्यायें हैं; $a_j (j=1, 2, \ldots, p)$; $b_j (j=1, 2, \ldots, q)$ ऐसी संकुल संख्यायें हैं कि $\Gamma(b_h - \beta_h s)(h=1, 2, \ldots, m)$ का कोई भी पोल $\Gamma(1-a_i+\alpha_i)(i=1, 2, \ldots n)$ के किसी भी पोल से संगमित नहीं होता ।

2. इस अनुभाग में हम मुख्य परिणामों (दो मूल समाकलों तथा उन पर आधारित दो समाकल सम्बन्धों) को निम्न प्रकार से स्थापित करेंगे ।

$$\text{(i)} \int_0^{\pi/2} \cos 2\mu\theta (\cos\theta)^{2\nu} (\sin\theta)^{2\nu} \, d\theta = \frac{\Gamma(\mu+\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_1+\frac{1}{2})}{2\Gamma(\mu+\nu+\nu_1+1)} \cdot {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \nu_1+\frac{1}{2}, -\mu, -\mu+\frac{1}{2} \\ -\mu-\nu+\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{matrix} ; 1 \right] \qquad (2\cdot1)$$

बशर्ते $R(2\nu+1)>0$, $R(2\nu_1+1)>0$ तथा μ एक धन पूर्णांक है ।

$$\text{(ii)} \int_0^{\pi} \sin(2\mu+1)\theta (\cos\theta)^{2\nu} (\sin\theta)^{2\nu_1} \, d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(2\mu+2)\Gamma(\mu+\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\nu_1+1)}{\Gamma(\mu+\nu+\nu_1+\frac{3}{2})\Gamma(2\mu+1)} \, {}_3F_2 \left[\begin{matrix} \nu_1+1, -\mu, -\mu+\frac{1}{2} \\ -\mu-\nu+\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} ; 1 \right] \qquad (2\cdot2)$$

बशर्ते $R(\nu+1)>0$, $R(\nu_1+1)>0$ तथा μ एक धन पूर्णांक है ।

$$\text{(iii)} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \cos 2\mu \left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) \frac{x^{2\nu} y^{2\nu_1}}{(x^2+y^2)^{\nu+\nu_1}} \cdot H_{p,q}^{m,n} \left[\alpha(x^2+y^2)^{2\rho-(\sigma+\sigma_1)} x^{2\sigma} y^{2\sigma_1} \middle| \begin{matrix} \{(a_p, \alpha_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\} \end{matrix} \right] f(x^2+y^2) \, dx \, dy$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} \sum_{t=0}^{\mu} (-1)^t \frac{(-\mu)_t (-\mu+\frac{1}{2})_t}{(\frac{1}{2})_t \, t!} \cdot \int_0^{\infty} H_{p+2,q+1}^{m,n+2} \left[\alpha z^{2\rho} \middle| \begin{matrix} (\frac{1}{2}-\mu-\nu+t, \sigma), (\frac{1}{2}-t-\nu_1, \sigma_1), \{(a_p, \alpha_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\}, (-\nu-\nu_1-\mu, \sigma+\sigma_1) \end{matrix} \right] f(z) \, dz \qquad (2\cdot3)$$

बशर्ते $\sigma, \sigma_1 \geqslant 0$, $R(2\nu+2\sigma\delta+1)>0$, $R(2\nu_1+2\sigma_1\delta+1)>0$, $f(z)=0(z^{-\epsilon})$ यदि z बड़ा हो; $f(z)=0(z^{\epsilon_1})$ यदि z छोटा हो, $\epsilon, \epsilon_1 > 0$, $|\arg \alpha| < \frac{1}{2}\lambda\pi (\lambda>0)$ तथा $A>0$,

जहाँ
$$\lambda \equiv \sum_{j=1}^{n} \alpha_j - \sum_{j=n+1}^{p} \alpha_j + \sum_{j=1}^{m} \beta_j - \sum_{j=m+1}^{q} \beta_j > 0,$$

$$A \equiv \sum_{j=1}^{q} \beta_j - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j > 0$$

तथा

$$\delta = \min R(b_h/\beta_h)(h=1, \ldots, m).$$

(iv)
$$\int_0^\infty \int_0^\infty \sin(2\mu+1)\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) \frac{x^{2\nu} y^{2\nu_1}}{(x^2+y^2)^{\nu+\nu_1}} .$$
$$. H_{p,q}^{m,n}\left[\alpha(x^2+y^2)^{2\rho-(\sigma+\sigma_1)} x^{2\sigma} y^{2\sigma_1} \left| \begin{matrix} \{(a_p, \alpha_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\} \end{matrix} \right.\right] f(x^2+y^2)\, dx\, dy$$
$$= \tfrac{1}{2} \sum_{t=0}^{\mu} (-1)^t \frac{(-\mu)_t (-\mu+\frac{1}{2})_t (2\mu+1)}{(\frac{3}{2})_t\, t!}$$
$$. \int_0^\infty H_{p+2,q+1}^{m,n+2}\left[\alpha z^{2\rho} \left| \begin{matrix} (\frac{1}{2}+t-\mu-\nu, \sigma), (-t-\nu_1, \sigma_1), \{(a_p, \alpha_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\}, (-\frac{1}{2}-\mu-\nu-\nu_1, \sigma+\sigma_1) \end{matrix} \right.\right] f(z)\, dz \qquad (2\cdot4)$$

बशर्ते $R(1+\nu_1+\sigma_1\delta)>0$, $|\arg \alpha| < \frac{1}{2}\lambda\pi$, $\lambda>0$, $A>0$ तथा λ, μ, δ और A वैसे ही हैं जैसे (2·3) में।

उपपत्ति

(2·1) तथा (2·2) की उपपत्ति के लिये $\cos 2\mu\theta$ तथा $\sin(2\mu+1)\theta$ को $\cos\theta$ तथा $\sin\theta$ के घातों में प्रसारित करते हैं, और प्रसारों को (2·1) तथा (2·2) के समाकल्य में रखते हैं तथा प्रत्येक पद का मान गामा फलन की सहायता से निकालते हैं और सूत्र (2·5) का उपयोग करते हैं।

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\tfrac{1}{2})$$

तथा

$$\Gamma(z-r+1) = (-1)^r \frac{\Gamma(-z)\Gamma(z+1)}{\Gamma(-z+r)} \qquad (2\cdot5)$$

अब परिणाम (2·3) प्राप्त करने से उद्देश्य से हम निम्नांकित समाकल से प्रारम्भ करेंगे

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2\mu\theta (\cos\theta)^{2\nu} (\sin\theta)^{2\nu_1} H_{p,q}^{m,n}\left[\alpha z^{2\rho} (\cos\theta)^{2\sigma} (\sin\theta)^{2\sigma_1} \left| \begin{matrix} \{(a_p, \alpha_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\} \end{matrix} \right.\right] d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{=0}^{t\mu}(-1)^t\frac{(-\mu)_t(-\mu+\frac{1}{2})_t}{(\frac{1}{2})_t\, t!}H^{m,n+2}_{p+2,q+1}\left[\underline{az^{2\rho}}\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}-\mu-\nu+t,\sigma),(\frac{1}{2}-t-\nu_1,\sigma_1)\{(a_p,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\beta_q)\},(-\nu-\nu_1-\mu,\sigma+\sigma_1)\end{matrix}\right.\right] \tag{2·6}$$

बशर्ते $\sigma, \sigma_1 \geqslant 0$, $R(2\nu+2\sigma\delta+1)>0$, $R(2\nu_1+2\sigma_1\delta+1)>0$, μ एक घन पूर्णांक है | $\arg \alpha|<\frac{1}{2}\lambda\pi$, $\lambda>0$, $A>0$, जहाँ δ, λ तथा A (2·3) में दिये हुये हैं।

(2·6) को सिद्ध करने के लिये हम मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर में H-फलन लिखेंगे और समाकलन के क्रम को परिवर्तित कर देगें। (2·6) का वाम पक्ष

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)}(\alpha z^{2\rho})^s\, ds$$

$$\cdot\int_0^{\pi/2}\cos 2\mu\theta(\cos\theta)^{2\nu+2\sigma s}(\sin\theta)^{2\nu_1+2\sigma_1 s}\, d\theta \tag{2·7}$$

(2·1) की सहायता से (2·7) में आन्तरिक समाकल का मान निकालने पर यह

$$=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\mu}(-1)^t\frac{(-\mu)_t(-\mu+\frac{1}{2})_t}{(\frac{1}{2})_t\, t!}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j s)\sum_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma(\mu+\nu+\sigma s+\frac{1}{2}-t)\Gamma(\nu_1+\sigma_1 s+t+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+\nu+\nu_1+\sigma s+\sigma_1 s+1)}(\alpha z^{2\rho})^s\, ds.$$

में समानीत हो जाता है। (2·5) में दिये गये सूत्र को उपर्युक्त में व्यवहृत करने पर और (1·1) के प्रकाश में परिणाम की विवेचना करने (2.6) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

अब (2·6) में $z=r^2$ रखने पर तथा दोनों ओर $r\,f(r^2)\,dr$ से गुणा करके सीमा $(0, \infty)$, के मध्य समाकलित करने पर

$$\int_0^{\infty} r\,f(r^2)\,dr\int_0^{\pi/2}\cos 2\mu\theta\,(\cos\theta)^{2\nu}\,(\sin\theta)^{2\nu_1}.$$

$$\cdot H^{m,n}_{p,q}\left[\alpha r^{4\rho}\,(\cos\theta)^{2\sigma}(\sin\theta)^{2\sigma_1}\left|\begin{matrix}\{(a_p,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{\mu}(-1)^t\frac{(-\mu)_t(-\mu+\frac{1}{2})_t}{(\frac{1}{2})_t\,t!}\int_0^\infty r\,f(r^2)$$

$$\cdot H_{p+2,q+1}^{m,n+2}\left[\alpha\,r^{4\rho}\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}-\mu-\nu+t,\,\sigma),\,(\frac{1}{2}-t-\nu_1,\,\sigma_1),\,\{(a_p,\,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\,\beta_q)\},\,(-\nu-\nu_1-\mu,\,\sigma+\sigma_1)\end{matrix}\right.\right]dr \qquad (2\cdot8)$$

प्राप्त होगा बशर्ते कि (2·3) में दिये गये प्रतिबन्धों की तुष्टि हो जाय।

अन्त में (2·8) के वाम पक्ष में $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $r^2=x^2+y^2$, $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ रखने पर तथा आगे और अधिक सरल करने पर हमें (2·3) में दिया हुआ फल प्राप्त होता है। इसी प्रकार से (2·2) में दिये हुये फल के उपयोग से परिणाम (2·4) प्राप्त किया जा सकता है।

3. विशिष्ट दशायें

(2·3) में $\nu_1=\sigma_1=0$ रखने पर तथा समाकलन के भीतर संकलन को प्रविष्ट करने पर

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{x^{2\nu}}{(x^2+y^2)^\nu}\cos 2\mu\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)H_{p,q}^{m,n}\left[\alpha(x^2+y^2)^{2\rho-\sigma}x^{2\sigma}\left|\begin{matrix}\{(a_p,\,\alpha_p)\}\\ \{(b_q,\,\beta_q)\}\end{matrix}\right.\right]f(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\int_0^\infty f(z)\,dz\,\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)}.$$

$$\cdot\sum_{t=0}^{\mu}(1-)^t\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu+\nu-t+\sigma s)\Gamma(-\mu+t)\Gamma(-\mu+\frac{1}{2}+t)}{\Gamma(1+\nu+\mu+\sigma s)\Gamma(-\mu)\Gamma(-\mu+\frac{1}{2})t!}(\alpha z^{2\rho})^s\,ds$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{4}\int_0^\infty f(z)\,dz\,\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\sum_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j s)\sum_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)}.$$

$$\cdot\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\mu,\,-\mu+\frac{1}{2}\\ -\mu-\nu-\sigma s+\frac{1}{2}\end{matrix};1\right],(\alpha z^{2\rho})^s\,ds. \qquad (3\cdot1)$$

(3·1) में सन्निहित हाइपरज्यामितीय श्रेणियों के योगफल को ज्ञात सूत्र

$$ {}_2F_1\,[a, b, c; 1] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} $$

के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है जहाँ c ऋण पूर्णांक नहीं है। अब गामा फलन के द्विगुणन सूत्र तथा सूत्र

$$ \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, $$

का उपयोग करने पर (3·1)

$$ \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_0^\infty H^{m,n+2}_{p+2,q+2} \left[\alpha z^{2\rho} \left| \begin{matrix} (\frac{1}{2}-\nu, \sigma)(-\nu, \sigma), \{(a_p, \alpha_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\}, (-\nu \pm \mu, \sigma) \end{matrix} \right. \right] f(z)\, dz \qquad (3\cdot2) $$

में समानीत हो जाता है बशर्ते $R(2\nu+2\sigma\delta+1)>0$, $|\arg \alpha| < \frac{1}{2}\lambda\pi$, $\lambda>0$, $A>0$ तथा $f(z)$, ϵ, ϵ_1, δ, λ, μ तथा A (2·3) में दिये हुये हैं, जो कि एक ज्ञात फल[5] है।

(ii) (2·3) में $\nu=\sigma=0$ रखने पर तथा (3·2) की भाँति सरल करने पर

$$ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{y^{2\nu_1} \cos 2\mu \left(\tan^{-1} \frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\nu_1}} H^{m,n}_{p,q} \left[\alpha (x^2+y^2)^{2\rho-\sigma_1} y^{2\sigma_1} \left| \begin{matrix} \{(a_p, \alpha_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\} \end{matrix} \right. \right] f(x^2+y^2)\, dx\, dy $$

$$ = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\pm\mu)}{4\sqrt{\pi}} \int_0^\infty H^{m,n+2}_{p+2,q+2} \left[\alpha z^{2\rho} \left| \begin{matrix} (\frac{1}{2}-\nu_1, \sigma_1), (-\nu_1, \sigma_1), \{(a_p, \alpha_p)\} \\ \{(b_q, \beta_q)\}, (-\nu_1 \pm \mu, \sigma_1) \end{matrix} \right. \right] f(z)\, dz \qquad (3\cdot3) $$

प्राप्त होता है बशर्ते $R(2\nu_1+2\sigma_1\delta+1)>0$, $|\arg \alpha| < \frac{1}{2}\lambda\pi$, $\lambda>0$, $A>0$ तथा $f(z)$, ϵ, ϵ_1, δ, λ, μ तथा A (2·3) में दिये हुये हैं जो कि एक ज्ञात फल है[5]।

(iii) (3·2) तथा (3·3) में क्रमशः $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_p=1=\beta_1=\beta_2=\ldots\beta_q$, $2\rho=1$, $\sigma=-1$ तथा $\sigma_1=-1$ रखने पर डहिया द्वारा दिया गया फल प्राप्त होता है[1] अर्थात्

$$ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos 2\mu \left(\tan^{-1} \frac{y}{x}\right)}{(x^2+y^2)^{\nu}} x^{2\nu} G^{m,n}_{p,q} \left[\frac{\alpha (x^2+y^2)^2}{x^2} \left| \begin{matrix} (a_p) \\ (b_q) \end{matrix} \right. \right] f(x^2+y^2)\, dx\, dy $$

$$ = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_0^\infty G^{m+2,n}_{p+2,q+2} \left[\alpha z \left| \begin{matrix} a_p, \nu\pm\mu+1 \\ \nu+\frac{1}{2}, \nu+1, b_q \end{matrix} \right. \right] f(z)\, dz \qquad (3\cdot4) $$

तथा

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos 2\mu\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) y^{2\nu_1}}{(x^2+y^2)^{\nu_1}} G_{p,q}^{m,n}\left[\frac{(x^2+y^2)^2}{y^2}\middle|\begin{matrix} a_p \\ b_q \end{matrix}\right] . f(x^2+y^2)\, dx\, dy$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\pm\mu}{4\sqrt{\pi}}\int_0^\infty G_{p+2,q+2}^{m+2,n}\left[az\middle|\begin{matrix} a_p, \nu_1\pm\mu+1 \\ \nu_1+\frac{1}{2}, \nu_1+1, b_q \end{matrix}\right] f(z)\, dz \tag{3·5}$$

बशर्ते $|\arg \alpha| < (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$, $R(\nu_1)>0$ तथा $f(z)$, ϵ, ϵ_1 तथा μ (2·3) की ही भाँति हैं।

निर्देश

1. डहिया, आर० एस०, **प्रोसी० इंडि० एके० साइंस**, 1971, **74(4)**, 167-71
2. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental Functions, **भाग I तथा II, मैकग्राहिल कम्पनी** 1953
3. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98(3)**, 395-299
4. प्रसाद, वाई० एन०, **पी० एच० डी० थीसिस, बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी**, 1969
5. प्रसाद, वाई० एन० तथा राम, एस० डी०, Progress of Mathematics, 1973, **7(2)**, 13-20

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No 2, April, 1975, Pages 123-127

कुछ परिमित संकलन III

बी० एम० अग्रवाल तथा आर० सी० मांगलिक
शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, ग्वालियर

[प्राप्त—सितम्बर 11, 1974]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य एक तथा दो चरों वाले G-फलन के लिये कुछ परिमित संकलन प्राप्त करना है ।

Abstract

On some finite summations III. *By* B. M. Agrawal and R. C. Manglik, Department of Mathematics, Government Science College, Gwalior.

In a recent paper Sharma and Abiodun[1] have obtained some finite summations for Meijer's G-function using an integral given by Shah[2]. Manglik[3] and Agrawal and Manglik[4] have also obtained similar results using the different identities of their paper[5]. The object of this paper is to obtain some finite summations involving the G-function of one and two variables.

1. प्रस्तुत लेखकों[6] द्वारा दी गई निम्नलिखित तत्समक का उपयोग प्रस्तुत शोधफल के विभिन्न फलों को सिद्ध करने के किया गया है ।

$$d \cdot {}_2F_1 \begin{bmatrix} d-b, d-a \\ \\ d \end{bmatrix}_{n+1} - (a+b-d-1) \cdot {}_2F_1 \begin{bmatrix} d-b+1, \; d-a+1 \\ \\ d+1 \end{bmatrix}_{n+1}$$

$$= \frac{(2d-b-a+n+1)}{n!} \cdot \frac{(d-b+1)_n (d-a+1)_n}{(d+1)_n} \tag{1·1}$$

वाम पक्ष में $(n+1)$ पादाक्षर बताता है कि प्रसार में F श्रेणी के केवल प्रथम $n+1$ पद ही सम्मिलित किये जाते है ।

2. इस अनुभाग में निम्नांकित परिणामों की स्थापना की जायेगी:

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left[\frac{1}{\Gamma(d+r)}\,G\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}1-d+b-r,\ a_p,\ d-a\\ d-a+r,\ b_q,\ 1-d+b\end{matrix}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{(d-a-b+1)}{\Gamma(d+r+1)}\,G\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}b-d-r,\ a_p,\ d-a+1\\ d-a+1+r,\ b_q,\ b-d\end{matrix}\right)\right]$$
$$=\frac{(2d-a-b+n+1)}{n!\,\Gamma(d+n+1)}\,G\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}b-d-n,\ a_p,\ d-a+1\\ d-a+1+n,\ b_q,\ b-d\end{matrix}\right), \tag{2·1}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left[\frac{1}{\Gamma(d+r)}\,G\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a_p,\ d-a,\ d-b\\ d-a+r,\ d-b+r,\ b_q\end{matrix}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\Gamma(d+r+1)}\,G\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{d-a-b+1}{2},\ a_p,\ d-a+1,\ d-b+1\\ d-a+r+1,\ d-b+r+1,\ b_q,\ \frac{d-a-b+3}{2}\end{matrix}\right]\right]$$
$$=\frac{1}{n!\,\Gamma(d+n+1)}\,G\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}a_p,\ d-a+1,\ d-b+1,\ \frac{2d-a-b+n+1}{2}\\ d-a+n+1,\ d-b+n+1,\ \frac{2d-a-b+n+3}{2},\ b_q\end{matrix}\right] \tag{2·2}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left[G\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}1-d+b-r,\ 1-d+a-r,\ a_p\\ b_q,\ 1-d-r,\ 1-d+b,\ 1-d+a\end{matrix}\right)\right.$$
$$\left.-G\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}b-d-r,\ a-d-r,\ a_p,\ a+b-d-1\\ a+b-d,\ b_q,\ -d-r,\ b-d,\ a-d\end{matrix}\right)\right]$$
$$=\frac{2}{n!}\;G\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{a+b-2d-n-1}{2},\ b-d-n,\ a-d-n,\ a_p\\ b_q,\ \frac{a+b-2d-n+1}{2},\ b-d,\ a-d\end{matrix}\right] \tag{2·3}$$

तथा

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left[(d-b)_r(d-a)_r\,G\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}a_p\\ b_q,\ 1-d-r\end{matrix}\right)\right.$$
$$\left.-(d-b+1)_r(d-a+1)_r\,G\left(x\,\middle|\,\begin{matrix}1-a-b+d,\ a_p\\ b_q,\ 2-a-b+d,\ -d-r\end{matrix}\right)\right]$$

$$=\frac{2d-b-a+n+1}{n!}(d-b+1)_n(d-a+1)_n\ G\left(x\ \middle|\ \begin{matrix}a_p\\ b_q,\ -d-n\end{matrix}\right) \qquad (2\cdot4)$$

जहाँ G-फलन की परिभाषा एर्डेल्यी इत्यादि[6] के अनुसार है। संक्षेपण की दृष्टि से हम निम्नलिखित का प्रयोग करेंगे:

$$G^{l,u}_{p,q}\left(x\ \middle|\ \begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(s)x^s\,ds \qquad (2\cdot5)$$

जहाँ
$$f(s)=\frac{\prod_{j=1}^{l}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=l+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=u+1}^{p}\Gamma(a_j-s)}.$$

उपपत्ति: (2·1) के सत्यापन के लिये (2·1) के बाम पक्ष में (2·5) को व्यवहृत करने पर

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\frac{1}{2\pi i}\int_L f(s)\left\{\frac{1}{\Gamma(d+r)}\frac{\Gamma(d-a+r-s)\Gamma(d-b+r+s)}{\Gamma(d-b+s)\Gamma(d-a-s)}\right.$$
$$\left.+\frac{(d-a-b+1)}{\Gamma(d+r+1)}\frac{\Gamma(d-a+r+1-s)\Gamma(1-b+d+r+s)}{\Gamma(1-b+d+s)\Gamma(d-a+1-s)}\right\}x^s\,ds$$

संकलन तथा समाकलन के क्रम को बदलने पर

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(s)\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left\{\frac{1}{\Gamma(d+r)}(d-a-s)_r(d-b+r)_r+\frac{d-a-b+1}{\Gamma(d+r+1)}\cdot\right.$$
$$\left.(d-a+1-s)_r(1-b+d+s)_r\right\}x^s\,ds.$$

(1·1) को व्यवहृत करने पर वांछित फल मिलता है। इसी प्रकार से अन्य फल भी सिद्ध किये जा सकते हैं। न केवल इस अनुभाग में दिये गये चार फल वरन् कुछ अतिरिक्त फल भी (1·1) से प्राप्त किये जा सकते हैं।

3. अब दो चरों वाले सार्वीकृत G-फलन के लिये हम एक रोचक फल प्राप्त करेंगे। शर्मा[7] ने दो चरों वाले G-फलन को निम्नलिखित ढंग से परिभाषित किया है

$$S\left[x,y\ \middle|\ \begin{bmatrix}m_1,0\\ p_1,q_1\end{bmatrix}\begin{matrix}a_{p_1}\\ b_{q_1}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{pmatrix}n_2,m_2\\ p_2,q_2\end{pmatrix}\begin{matrix}c_{p_2}\\ d_{q_2}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{pmatrix}n_3,m_3\\ p_3,q_3\end{pmatrix}\begin{matrix}c_{p_3}\\ f_{q_3}\end{matrix}\ \middle|\ \right]$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{c_1}\int_{c_2}\phi(s+t)\psi(s,t)x^s y^t\,ds\,dt \qquad (3\cdot1)$$

जहाँ
$$\phi(s+t)=\frac{\prod_{j=1}^{m1}\Gamma(a_j+s+t)}{\prod_{j=m_1+1}^{p1}\Gamma(1-a_j-s-t)\prod_{j=1}^{q1}\Gamma(bj+s+t)},$$

$$\psi(s,t)=\frac{\prod_{j=1}^{m2}\Gamma(1-c_j+s)\prod_{j=1}^{n2}\Gamma(d_j-s)\prod_{j=1}^{m3}\Gamma(1-e_j+t)\prod_{j=1}^{n3}\Gamma(f_j-t)}{\prod_{j=m_2+1}^{p2}\Gamma(c_j-s)\prod_{j=n_2+1}^{q2}\Gamma(1-d_j+s)\prod_{j=m_3+1}^{p3}\Gamma(e_j-t)\prod_{j=n_3+1}^{q3}\Gamma(1-f_j+t)}.$$

अभिसरण के लिये उपयुक्त प्रतिबन्ध विद्यमान हैं।

हम निम्नांकित सूत्र प्राप्त करेंगे:

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left[\frac{1}{\Gamma(d+r)}S\left[x,y\,\middle|\,\left[\begin{matrix}m_1,0\\p_1,q_1\end{matrix}\right]\begin{matrix}a_{p_1}\\b_{q_1}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{pmatrix}n_2,\ m_2+1\\p_2+1,\ q_2+1\end{pmatrix}\begin{matrix}1-d+a-r,\ c_{p_2}\\d_{q_2},\ 1-d+a\end{matrix}\right|\right.$$
$$\left.\times\begin{pmatrix}n_3,\ m_3+1\\p_3+1,\ q_3+1\end{pmatrix}\begin{matrix}1-d+b-r,\ e_{p_3}\\f_{q_3},\ 1-d+b\end{matrix}\,\middle|\,\right]$$
$$+\frac{1}{\Gamma(d+r+1)}S\left[x,y\,\middle|\,\begin{matrix}m_1+1,0\\p_1+1,\ q_1+1\end{matrix}\,\middle]\,\begin{matrix}d-a-b+2,\ a_{p1_1}\\b_{q_1}-d-a-b+1\end{matrix}\right|$$
$$\left.\left.\times\begin{pmatrix}n_2,\ m_2+1\\p_2+1,\ q_2+1\end{pmatrix}\begin{matrix}a-d-r,\ c_{p_2}\\d_{q_2},\ a-d\end{matrix}\,\middle|\,\begin{pmatrix}n_9,\ m_3+1\\p_3+1,\ q_3+1\end{pmatrix}\begin{matrix}b-d-r,\ e_{p_3}\\f_{q_3},\ b-d\end{matrix}\right|\right]\right]$$
$$=\frac{1}{n!\,\Gamma(d+n+1)}S\left[x,\ y\,\middle|\,\left[\begin{matrix}m_1+1,\ c\\p_1+1,\ q_1+1\end{matrix}\right]\begin{matrix}2d-a-b+n+2,\ a_{p_2}\\b_{q_2},\ 2d-a-b+n+1\end{matrix}\right|$$
$$\times\begin{pmatrix}n_2,\ m_2+1\\p_2+1,\ q_2+1\end{pmatrix}\begin{matrix}a-d-n,\ c_{p_2}\\d_{q_2},\ a-d\end{matrix}\,\middle|\,\begin{pmatrix}n_3,\ m_3+1\\p_3+1,\ q_3+1\end{pmatrix}\begin{matrix}b-d-n,\ c_{p_3}\\f_{q_3},\ b-d\end{matrix}\,\middle|\,\right]\qquad(3\cdot2)$$

(3·2) को सिद्ध करने के लिये इसके बाम पक्ष में (3·1) को व्यवहृत करते हैं तो हमें

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{c_1}\int_{c_2}\phi(s+t)\psi(s,t)\left\{\frac{1}{\Gamma(d+r)}\frac{\Gamma(d-b+t+r)\Gamma(d-a+s+r)}{\Gamma(d-b+t)\Gamma(d-a+s)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\Gamma(d+r+1)}\frac{\Gamma(d-a-b+2+s+t)\Gamma(d-b+1+t+r)\Gamma(d-a+1+s+r)}{\Gamma(d-a-b+1+s+t)\Gamma(d-b+1+t)\Gamma(d-a+1+s)}\right\}$$
$$x^s y^t\,ds\,dt.$$

प्राप्त होता है। संकलन तथा समाकलन का क्रम बदलने पर

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{c_1}\int_{c_2}\phi(s+t)\psi(s,t)\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left[\frac{(d-b+t)_r(d-a+s)_r}{\Gamma(d+r)}\right.$$

$$\left.+\frac{(d-a-b+1+s+t)(d-b+1+t)_r(d-a+1+s)_r}{\Gamma(d+r+1)}\right]x^s y^t\,ds\,dt.$$

अब (1·1) का उपयोग करने पर हमें (3·2) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है जिससे फल सिद्ध होता है।

पिछले अनुभागों में दिये गये संकलनों में निहित फलनों के प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा उनकी विशिष्ट दशाओं के रूप में कई फल प्राप्त किये जा सकते हैं।

निर्देश

1. शर्मा, बी० एल० तथा अबियोडन, आर० एफ० ए०, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie Tome, 1971, **4**, 473-480
2. शाह, एम०, **प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०**, 1969, **65**, 713-720
3. मांगलिक, आर० सी०, (**प्रकाशनाधीन**)
4. अग्रवाल, बी० एम० तथा मांगलिक, आर० सी०, (**प्रकाशनाधीन**)
5. वही, (**प्रेषित**)
6. एर्डेल्यी, ए०, इत्यादि Higher Transcendental Functions, **भाग** I, **न्यूयार्क** 1953 **पृष्ठ** 207
7. शर्मा, बी० एल०, Ann. Soc. Sci. Bruxelles., 1965, **79**, 26-40

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 2, April, 1975, Pages 129-132

तुंग के मध्यकाष्ठ से प्राप्त बहुलक का अध्ययन

एस० के० गुप्ता तथा एन० एम० बोकाड़िया
रसायन विभाग, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—फरवरी 5, 1975]

सारांश

तुंग के मध्यकाष्ठ से प्राप्त बहुलक के संघनन से रेडाक्स-रेजिन प्राप्त किया गया जो सल्फोनीकरण पर आयन-विनिमय रेजिन में परिवर्तित हो जाता है। इस शोधपत्र में रेडाक्स रेजिन तथा आयन-विनिमय रेजिन के अध्ययन का उल्लेख है।

Abstract

Studies with the polymer from the heartswood of Rhus parviflora (Roxb). *By* S. K. Gupta and M. M. Bokadia, School of Studies in Chemistry, Vikram University, Ujjain.

The polymer obtained from the heartswood of *Rhus Parviflora* (Roxb) on con , densation provided redox-resin which on sulphonation provided ion-exchange resin.

रुस परविफ्लोरा (रोक्सब) (हिन्दी-तुंग) एनाकार्डिएसी परिवार का सदस्य है। यह हिमालय के तराई क्षेत्रों में पाया जाता है।

ओयमाडा[1-2] ने रुस सक्सीडेनिया के मध्यकाष्ठ से फुसटिन (2, 3 डाइहाइड्रोफ्लेवेनाल) तथा फिसेटिन (फ्लेवेनाल) प्राप्त किया। फुसटिन तथा फिसेटिन रुस की अन्य प्रजातियों में भी साथ-सांथ पाये गये[3 6]। रुस परविफ्लोरा की छाल से (+) ल्यूकोसायनेडिन, (+) डेलफिनिडिन तथा एक कार्बोनिल पदार्थ के मिलने का उल्लेख[7] मिलता है। हमारी प्रयोगशाला में इसके मध्यकाष्ठ से ल्यूको-सायनेडिन, ल्यूको-डेनिफिनिडिन एक बहुलक के साथ प्राप्त किये गये।

यद्यपि इस वृक्ष पर काफी रोचक कार्य हुआ है किन्तु मध्यकाष्ठ से प्राप्त बहुलक का विस्तृत अध्ययन नहीं किया गया। प्रस्तुत शोधपत्र में इस उद्देश्य की पूर्ति हेतु किये गये कार्य का उल्लेख है।

प्रयोगात्मक

(500 g.) तुंग के मध्यकाष्ठ की छीलन लेकर उसे (5 लीटर) पानी के साथ रखने से लाल भूरे रंग का विलयन प्रप्त हुआ, जिसका निष्कर्षण एथिल ऐसीटेट से करने पर निर्देश क्रम 8 की पुष्टि हुई। इसे इसी प्रकार छोड़ दिया गया। जलीय विलयन को साधारण नमक द्वारा संतुष्ट करने से (50 g.) चाकलेट रंग का पदार्थ प्राप्त हुआ. जो कि ऐल्कोहल तथा ऐसीटोन में विलेय पाया गया। यह पदार्थ गर्म किये जाने से काला पड़ने लगता है तथा 280° तक द्रवित नहीं होता है। रास्ट केम्फर विधि द्वारा इसका गलनांक 970 ज्ञात हुग्रा। एक प्रतिशत 10 मि०ली० मेथेनॉलिक हाइड्रोक्लोरिक अम्ल के साथ 0·5 ग्राम बहुलक का जल अपघटन करने पर लाल रंग का विलयन प्राप्त हुग्रा। वर्णलेखी द्वारा इस विलयन में दो पदार्थों का होना पाया गया जिनके R_f. मुल्य सायनेडिन तथा डेल्फेनिडिन के समान प्राप्त हुये। इस अवलोकन से स्पष्ट होता है कि बहुलक ल्यूकोसायनेडिन और ल्यूकोडेल्फेनिडिन से निर्मित है।

रेडाक्स-रेज़िन की प्राप्ति तथा इसके गुणधर्म का अध्ययन

10 ग्राम बहुलक को 50 मि०ली० पानी, 3 मि०ली० 40 प्रतिशत फार्मेल्डिहाइड तथा 5 मि०ली० 10 प्रतिशत कास्टिक सोडा विलयन के साथ 6 घण्टे तक मन्द-मन्द गर्म किया। ठण्डा करने के बाद शुद्ध पानी से धोने से 2 ग्राम रेज़िन प्राप्त हुग्रा। यह रेज़िन 280° तक द्रवित नहीं होता है, रास्ट-केम्फर विधि द्वारा इसका अणुभार 1,00 प्राप्त हुग्रा। गुणात्मक विश्लेषण द्वारा इसमें ग्राक्सीकारक तथा अवकारक गुण पाये गये। इन्हीं गुणों का प्ररिमाणात्मक विश्लेषण करने पर निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त हुये।

(1) रेज़िन द्वारा अवकरण

सात फ्लास्कों में पृथक पृथक 20 मि०ली० 0·25 N पोटैशियम डाइक्रोमेट, 0·5 ग्राम रेज़िन के साथ लिया। समयान्तर के साथ इनके ग्रनुपयोगी पोटैशियम डाइक्रोमेट का हाइपो विलयन के साथ अनुमापन किया जिसके निष्कर्ष सारणी 1 में दर्शाये गये हैं।

सारणी 1

क्रमांक	समय मिनिटों में	प्रयुक्त हाइपो विलयन का आयतन
1	0	17·8 मि०ली०
2	30	15·8
3	60	14·2
4	120	13·0
5	180	12·0
6	240	9·2
7	∞	7·1

सारणी के मान पोटैशियम डाइक्रोमेट के क्रमशः अवकरण को दर्शाते हैं।

(2) रेज़िन द्वारा आक्सीकरण

सात फ्लास्कों में पृथक-पृथक 0·5 ग्राम रेज़िन के साथ 20 मि०ली० 0·25N फेरस अमोनियम सल्फेट विलयन लिया गया। समयान्तर के साथ अनुपयोगी फेरस अमोनियम सल्फेट का अनुमापन पोटैशियम परमैंगनेट के साथ किया गया जिसके निष्कर्ष सारणी 2 में दिये गये हैं।

सारणी 2

क्रमांक	समय मिनिटों में	प्रयुक्त पोटैशियम परमैंगनेट का आयतन
1	0	18·3
2	60	18·3
3	120	17·5
4	180	17·1
5	240	16·7
6	300	16·2
7	360	15·8

उपर्युक्त निष्कर्ष से रेज़िन द्वारा Fe^{++} से Fe^{+++} का आक्सीकरण दर्शित है।

सल्फोनीकृत रेज़िन की प्राप्ति तथा इसके आयन विनिमय गुण का अध्ययन

1 ग्राम रेज़िन को 1 मि०ली० सधूम गंधकाम्ल के साथ आधा घण्टे तक पश्चवाहित किया गया। ठण्डा हो जाने पर अभिक्रिया फल को 250 मि०ली० पानी में मिलाकर छान लिया गया, प्राप्त अवशेष को जल से भली प्रकार धोकर सुखाया गया। इससे 0·8 ग्राम काले रंग का रेज़िन प्राप्त हुआ जो 280° तक अद्रवित रहता है।

धनायन परिवर्तन : 0·2 ग्राम सल्फोनिकृत रेज़िन को 2 घण्टे तक 5 मि०ली० 0·25N कास्टिक सोडा विलयन के साथ हिलाकर छान लिया। निष्कर्ष में लिटमस तथा फिनोफ्थेलिन द्वारा परीक्षण गुण नहीं पाया गया जो धनायन के परिवर्तन का स्पष्ट संकेत है। अवशिष्ट रेज़िन को 24 घण्टे तक कास्टिक सोडा विलयन के साथ अभिकृत कर, छानकर पृथक करने के बाद इसे प्रयोग 2 के लिये प्रयुक्त किया।

ऋणायन परिवर्तन : प्रयोग 1 से प्राप्त 0·2 ग्राम रेज़िन को 2 मि०ली० 0·25N गन्धकाम्ल के साथ 4 घण्टे रखकर छान लिया। परीक्षण करने पर पाया गया कि निष्कर्ष नीले लिटमस का रंग परिवर्तित नहीं करता है। इस अवलोकन से स्पष्ट है कि आयन में परिवर्तन हुआ है। इन्हीं दशाओं में किये गये रिक्त प्रयोग प्राप्त परिणामों की संपुष्टि करते हैं।

निर्देश

1. ओयमाडा, **जर्न० केमि० सोसा० जापान**, 1934, **55**, 755.
2. ओयमाडा, **लिबिग एन्युअल रिपोर्ट**, 1939, **44**, 538.
3. फेडेनबर्ग तथा विन्गेस, **केमिस्ट्री एंड इन्डस्ट्री**, 1959, 486.
4. विन्गेस एन्युअल रिपोर्ट, **लिबिग एन्युअल रिपोर्ट**, 1959, **229**, 627.
5. ससेगवा तथा शिरटे, **जर्न० केमि० सोसा० जापान**, 1951, **72**, 233.
6. केपलर, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1957, 2721.
7. वर्मा, बी० एल० तथा बोकाड़िया, एम० एम०, **बुले० नेचरल साइंस, (भारत)**, 1965, **31**, 136.
8. बेरगे, डी० डी० तथा बोकाड़िया, एम० एम०, (मुद्रणाधीन)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 2, April 1975, Pages 133-137

सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन का प्राचलों के प्रति समाकलन

एस० पी० गोयल
गणित विभाग, वनस्थली विद्यापीठ राजस्थान
तथा
एस० एल० माथुर
गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय, नाथद्वारा

[प्राप्त — मई 23, 1974]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन का प्राचलों के प्रति समाकलन करना है । इन समाकलों का मान मेलिन परिवर्त के एक फलन तथा यहाँ पर स्थापित H-फलन के प्रतिबिम्बों के मध्य सम्बन्ध के द्वारा निकाला गया है । ये समाकल अत्यन्त व्यापक प्रकृति के है और इनकी विशिष्ट दशाओं के रूप में कई नवीन तथा ज्ञात समाकल प्राप्त होते हैं ।

Abstract

On integration of the generalized hypergeometric function with respect to parameters *By* S. P. Goyal, Department of Mathematics, B. V. College of Arts and Science, Banasthali Vidyapith, Rajasthan and S. L. Mathur, Department of Mathematics, Government College, Nathdwara, Rajasthan.

The aim of this paper is to integrate the generalized hypergeometric functions with respect to the parameters. These integrals have been evaluated with the help of a relation between the images of a function in the Mellin transform and in the H-function transform established in this paper. These integrals are quite general in nature and yield various other new and known integrals as their special cases.

1. मुख्य प्रमेय :

यदि $x^{\rho-1} f(x) \in L(0, \infty)$, $Re(b_j)>0 (j=1, ..., m)$, $Re(a_i)<1$ $(i=1, ... n)$

$$A=\sum_{1}^{n}(\alpha_j)-\sum_{n=1}^{p}(\alpha_j)+\sum_{1}^{m}(\beta_j)-\sum_{m+1}^{q}(\beta_j)>0,$$ तथा $|\arg s|<(\tfrac{1}{2})A\pi$,

तो

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\prod_{1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\xi)\prod_{1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\xi)}{\prod_{m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\xi)\prod_{n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j\xi)}M[f(x):\xi+\rho]\,s^{\xi}\,d\xi$$

$$=H\left[x^{-1}f(x)\,;{}^{m,\,n}_{p,\,q}\,;\,\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\,;s\right] \quad \ldots \quad (1\cdot1)$$

जहाँ (i) $(a_j, \alpha_j)_{1,p}$ प्राचलों के अनुक्रम $(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_p, \alpha_p)$; के लिये आया है।

(ii) $M[f(x):s]$ सर्वविदित मेलिन परिवर्त $\int_0^\infty x^{s-1}f(x)\,dx$ के लिये और

(iii) $H\left[f(x)\,;{}^{m,\,n}_{p,\,q}\,;\,\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\,;s\right]=\int_0^\infty M^{m,n}_{p,q}\left[sx\left|\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]f(x)\,dx$

गुप्ता तथा मित्तल [2, p. 142] द्वारा परिभाषित H-फलन परिवर्त के लिये आया है

उपपत्ति : [1, p. 594] से

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\prod_{1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\xi)\prod_{1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\xi)}{\prod_{m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\xi)\prod_{n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j\xi)}(xs)^{\xi}\,d\xi=H^{m,n}_{p,q}\left[sx\left|\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right] \quad (1\cdot2)$$

अब (1·2) में दोनों ओर $x^{\rho-1}f(x)$ से गुणा करने पर तथा 0 से ∞ सीमाओं के मध्य x के प्रति समाकलित करने पर तथा इस प्रकार से प्राप्त परिणाम के बाईं ओर के समाकलन क्रम को परिवर्तित करने पर वांछित प्रमेय प्राप्त हो जाता है।

2. समाकल :

प्रस्तुत प्रपत्र में निम्नांकित समाकलों का मान ज्ञात किया गया है :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\prod_{1}^{m}\Gamma(b_j-\beta_j\xi)\prod_{1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\xi)\Gamma(\rho+\tfrac{1}{2}\xi\pm\mu)\Gamma(2\rho+\xi)}{\prod_{m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j\xi)\prod_{n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j\xi)\Gamma(\tfrac{1}{2}\pm k+\rho+\tfrac{1}{2}\xi)}$$

$$\times{}_4F_3(\rho+\tfrac{1}{2}\xi,\ \rho+\tfrac{1}{2}\xi+\tfrac{1}{2},\ \rho+\tfrac{1}{2}\xi\pm\mu;\ \tfrac{1}{2}\pm k+\rho+\tfrac{1}{2}\xi,\ 1+\nu;\ a)\ s^{\xi}\,d\xi$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty} (\tfrac{1}{4}a)^u \frac{1}{(1+\nu, u)\, u!} H_{p+3,\, q+2}^{m,\, n+3}\left[s \left| \begin{matrix} (1-\rho\pm\mu-u, \frac{1}{2}), (1-2\rho-2u, 1), (a_j, \alpha_j)_{1,\, p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,\, q}, (\frac{1}{2}\pm k-\rho-u, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right.\right] \qquad (2\cdot 1)$$

जहाँ (i) $\Gamma(a\pm b)$ से $\Gamma(a+b)\Gamma(a-b)$,

(ii) $(a\pm b, a)$ से प्राचल $(a+b, a)$, $(a-b, a)$ का बोध होता है ।

समाकल (2·1) वैध है यदि निम्नांकित प्रतिबन्धों की तुष्टि हो :

$Re(a)>0$, $Re(\rho)>|Re(\mu)|$, $Re(b_j)>0 (j=1, ..., m)$, $Re(a_i)<1$ $(i=1, ..., n)$, $A>0$, $|\arg s|<(\frac{1}{2}) A\pi$ तथा $\min Re(b_j)/(\beta_j))>0 (j=1, ..., m)$•

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\prod_{1}^{m} \Gamma(b_j-\beta_j\xi) \sum_{1}^{n} \Gamma(1-a_j+\alpha_j\xi)\, \Gamma\left(\frac{2+\nu+\xi+\rho\pm\mu}{2}\right)}{\prod_{m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+\beta_j\xi) \prod_{n+1}^{p} \Gamma(a_j-\alpha_j\xi)}$$

$$\times {}_3F_2\left(1, \frac{1+\nu+\xi+\rho\pm\mu}{2}; \frac{3}{2}, \nu+\frac{3}{2}; a\right) s^{\xi}\, d\xi$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a^u}{(\frac{3}{2}, u)(\frac{3}{2}+\nu, u)} H_{p+2,\, q}^{m, n+2}\left[s \left| \begin{matrix} \left(-\frac{\nu+\rho+\mu+2u}{2}, \frac{1}{2}\right), (a_j, \alpha_j)_{1,\, p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,\, q} \end{matrix} \right.\right] \ldots \quad (2\cdot 2)$$

बशर्ते कि $Re(\rho+\nu+2)>|Re(\mu)|$, $Re(a)>0$, $Re(b_j)>0$ $(j=1, ..., m)$, $Re(a_i)<1$ $(i=1, ..., n)$ $A>0$, $|\arg s|<(\frac{1}{2})A\, \pi$ तथा $\min Re(b_j/\beta_j))>0 (j=1, ..., m)$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\prod_{1}^{m} \Gamma(b_j-\beta_j\xi) \prod_{1}^{n} \Gamma(1-a_j+d_j\xi)\Gamma\left(\frac{\rho+\nu\pm\lambda\pm\mu+\xi}{2}\right)}{\prod_{m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+\beta_j\xi) \prod_{1}^{p} \Gamma(a_j-\alpha_j\xi)\Gamma(\rho+\xi+\nu)}$$

$$\times {}_5F_4\left(1, \frac{\rho+\xi+\nu\pm\lambda\pm\mu}{2}; \frac{3}{2}; \nu+\frac{3}{2}, \frac{\rho+\xi+\nu}{2}; \frac{\rho+\xi+\nu+1}{2};\right) s^{\xi}\, d\xi$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty} \frac{a^u}{(\frac{3}{2}, u)(\frac{3}{2}+\nu, u)} H_{p+4,\, q+1}^{m,\, n+4}\left[s \left| \begin{matrix} \left(\frac{2-\rho-\nu\pm\lambda\pm\mu-2u}{2}, \frac{1}{2}\right), (a_j, \alpha_j)_{1,\, p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,\, q}, (1-\rho-\nu-2u, 1) \end{matrix} \right.\right] \qquad (2\cdot 3)$$

जहाँ (i) $\Gamma(a\pm b\pm c)$ से $\Gamma(a+b+c)\Gamma(a-b+c)\Gamma(a-b-c)\Gamma(a+b-c)$;

(ii) $(a\pm b\pm c, a)$ से प्राचल $(a+b+c, a)$, $(a+b-c, a)$, $(a-b+c, a)$, $(a-b-c, a)$ का द्योतन होता है ।

समाकल (2·3) निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है :
$Re(\rho+\nu)>|Re(\lambda)|+|Re(\mu)|$, $Re(b_j)>0$ $(j=1, ..., m)$, $Re(a_i)<1$ $(i=1, ..., n)$, $A>0$, $|\arg s|<(\frac{1}{2})A\pi$ तथा min $Re((b_j \beta_j))>0$ $(j=1, ..., m)$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\prod_{1}^{m} \Gamma(b_j-\beta_j\xi) \prod_{1}^{n} \Gamma(1-a_j+a_j\xi)\, \Gamma\left(\frac{\lambda+\mu+\nu+\rho+\xi}{2}\right)}{\prod_{m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+\beta_j\xi) \prod_{n+1}^{p} \Gamma(a_j-a_j\xi)\left(1-\frac{\lambda+\mu-\nu+\rho+\xi}{2}\right)}$$

$$\times {}_4F_3\left(\frac{\lambda+\mu+1}{2}, \frac{\lambda+\mu}{2}+1, \frac{\lambda+\mu\pm\nu+\rho+\xi}{2}; \lambda+1, \mu+1, \lambda+\mu+1; a\right) s^{\xi}\, d\xi$$

$$= \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda+\mu+1}{2}, u\right)\left(\frac{\lambda+\mu}{2}+1, u\right) a^u}{(\lambda+1, u)(\mu+1, u)(\lambda+\mu+1, u)}$$

$$\times H_{p+3,\, q+1}^{m,\, n+2}\left[s \left| \begin{matrix} \left(\frac{2-\lambda-\mu\pm\nu-\rho-2u}{2}, \frac{1}{2}\right), (a_j, a_j)_{1, p}, \left(\frac{2-\lambda-\mu+\nu-\rho}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ (b_j, \beta_j)_{1, q}, \left(\frac{2-\lambda-\mu+\nu-\rho}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{matrix} \right.\right] \quad (2\cdot4)$$

बशर्ते $Re(\lambda+\mu+\nu+\rho)>0$, $Re(a)>0$, $Re(b_j)>0$ $(j=1, ..., m)$, $Re(a_j)<1 (i=1, ..., n)$, $A>0$, $|\arg s|<(\frac{1}{2})A\pi$ तथा min $Re((b_j/\beta_j))>0$ $(j=1, ..., m)$.

उपर्युक्त समाकलों में $(a_j, a_j)_{1, p}$ से $(a_1, a_1), ..., (a_p, a_p)$ और (a, n) से $a(a+1)...(a+n-1)$ या $\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$ का द्योतन हुआ है ।

समाकलों की उपपत्तियाँ

(2·1) **की उपपत्ति :** (2·1) में यदि हम

$$f(x)=x^{\rho-\nu-1}W_{k,\,\mu}(ax)W_{-k,\,\mu}(ax)\, J_2(bx) \quad (2\cdot5)$$

मानें तथा $M[f(x) : \xi+\rho]$ का मान ज्ञात फल (2·5) [1, p. 605] तथा (2·5) के H-फलन परिवर्त की सहायता से [3, p. 5], निकालें तो वांछित फल (2·1) प्राप्त होगा ।

(2·2) **से (2·4) तक की उपपत्तियाँ :** इनकी उपपत्तियाँ (2·1) की उपपत्ति के समान है, अन्तर इतना ही है कि यहाँ पर (2·5) के बजाय हम $f(x)$ के रूप में निम्नांकित फलनों को लेते हैं ।

$$f(x)=x\, K_{\mu}(ax)\, H_{\nu}(bx) \quad \cdots (2\cdot6)$$

$$f(x)=x^{-1}\, K_{\lambda}(ax)\, K_{\mu}(ax)\, H_{\nu}(bx) \quad \cdots (2\cdot7)$$

$$f(x)=J_{\lambda}(ax)\,J_{\mu}(ax)\,J_{\nu}(2bx) \quad \ldots \quad (2{\cdot}8)$$

(2·1) से (2·4) से प्राप्त समाकल प्रकृति में अत्यन्त व्यापक हैं और यदि हम इन समाकलों में m, n, p, q, a's तथा b's को विभिन्न मान प्रदान करें तो कई नवीन तथा ज्ञात समाकल प्राप्त होंगे किन्तु स्थानाभाव के कारण इनका वहिष्कार किया जा रहा है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० के० सी० गुप्ता के अत्यन्त आभारी हैं जिन्होंने सब प्रकार से प्रोत्साहित किया।

निर्देश

1. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस, इंडिया,** 1966, **36A,** 594-609.
2. गुप्ता, के० सी० तथा मित्तल, पी० के०, **जर्न० आस्ट्रेलियन मैथ० सोसा०,** 1970, **11,** 142-48.
3. मुखर्जी, एस०, एन० तथा प्रसाद, वाई एन०, **मैथ० एजुकेशन,** 1971, **5,** 5-12.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrik
Vol 18, No 2, April, 1975, Pages 139-150

सार्वीकृत कोबर संकारकों के कतिपय गुण

आर० के० सक्सेना तथा आर० के० कुम्भात
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—जून 12, 1973]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में हमने अप्रतिम प्रमेय की तथा अपने द्वारा प्रयुक्त सार्वीकृत कोबर के संकारकों के लिये एक विलोमन सूत्र की स्थापना की है। इन संकारकों का सम्बन्ध हैंकेल परिवर्त, कोबर के संकारकों तथा लैप्लास के संकारकों से प्रदर्शित किया गया है।

Abstract

Some properties of generalized Kober operators. *By* R. K. Saxena and R. K. Kumbhat, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Rajasthan.

In this paper we have established uniqueness theorem, and an inversion formulae for the the generalized Kober's operators introduced earlier by the authors [6, p. 31] in this Journal. Further we give the relations of these operators with Hankel transform, Kober's operators and Laplace operators.

1. परिचय

प्रस्तुत शोध पत्र एक पूर्ववर्ती प्रपत्र के क्रम में है कोबर के संकारकों का सार्वीकित रूप में प्रयुक्त किया गया था।

$$R[f(x)]=R[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(x)]$$
$$=\frac{x^{-\eta-\delta}}{\Gamma(\delta)}\int_0^x t^{\eta}(x-t)^{\delta-1}F\left(\alpha, \beta, \delta;\ 1-\frac{t}{x}\right)f(t)\,dt \tag{1·1}$$

तथा

$$K[f(x)=K[\alpha, \beta, \eta, \gamma : f(x)]$$
$$=\frac{x^{\eta}}{\Gamma(\gamma)}\int_x^{\infty} t^{-\eta-\gamma}\,(t-x)^{\gamma-1}\,F\left(\alpha, \beta;\ \gamma;\ 1-\frac{x}{t}\right)f(t)\,dt \tag{1·2}$$

जहाँ $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ से गॉस के हाइपरज्यामितीय फलन का बोध होता है और $\alpha, \beta, \eta, \gamma$ तथा δ मिश्रित प्राचल हैं।

संकारक (1·1) तथा (1.2) निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत विद्यमान रहते हैं।

(i) $1 \leqslant p, q < \infty, p^{-1}+q^{-1}=1$

(ii) $Re(\eta) > -\frac{1}{q}$, $Re(\delta, \gamma) > 0$

(iii) $\delta, \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots, Re\left(\frac{\gamma}{\delta}-\alpha-\beta\right)>0$

(iv) $f(x) \in L_p(0, \infty)$. (1·3)

2. **अप्रतिम प्रमेय**

प्रमेय 1 यदि $f_1(x)$ और $f_2(x)$ $x \geqslant 0$, में संतत हैं

तथा $$R[\alpha, \beta, \eta, \delta: f_1(x)] = R[\alpha, \beta, \eta, \delta: f_2(x)], \tag{2·1}$$

दोनों ही समाकल अभिसारी हों तो

$$f_1(x) \equiv f_2(x). \tag{2·2}$$

अप्रतिम प्रमेय को सिद्ध करने के लिये पहले हम निम्नांकित प्रमेयिका को सिद्ध करेंगे

यदि $$R[\alpha, \beta, \eta: \delta: f(x)]=0 \tag{2·3}$$

तो $$f(x) \equiv 0 \tag{2·4}$$

बशर्ते कि $f(x)$ $x \geqslant 0, f(x) \in L_p(0, \infty)$ में संतत हो।

उपपत्ति : (1·1) तथा (2·3) से (2·5) की प्राप्ति होगी

$$\frac{x^{-\eta-\delta}}{\Gamma(\delta)} \int_0^x t^{\eta}(x-t)^{\delta-1} {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \delta; 1 \quad \frac{t}{x}\right) f(t)\, dt = 0. \tag{2·5}$$

(2·5) को

$$x^{-\sigma} G_{2n, s+2n}^{s+2n, 0}\left[\left(\frac{z}{s}\right)^s x^n \middle| \begin{matrix} \triangle(n, \eta+\sigma). \triangle(n, \eta+\sigma+\delta-\alpha-\beta) \\ \triangle(s, 0), \triangle(n, \sigma+\eta+\delta-\alpha), \triangle(n, \eta++\sigma\delta-\beta) \end{matrix}\right] \tag{2·6}$$

से गुणा करने पर जहाँ $s>2n$, $|\arg z| < \left(\frac{1}{2}-\frac{n}{s}\right)\pi$, $Re(\sigma) < \min\left[Re(\alpha, \beta), 1+\frac{n}{s}\right]$ और $(0, \infty)$ में x के प्रति समाकलित करने पर

$$\int_0^\infty x^{-\sigma} G_{2n,s+2n}^{s+2n,0}\left[\left(\frac{z}{s}\right)^s x^n \,\middle|\, \begin{matrix} \triangle(n, \eta+\sigma),\ \triangle(n, \eta+\sigma+\delta-\alpha-\beta) \\ \triangle(s, 0),\ \triangle(n, \eta+\sigma+\delta-\alpha),\ \triangle(n, \eta+\sigma+\delta-\beta) \end{matrix}\right]$$

$$\times\left\{\frac{x^{-\eta-\delta}}{\Gamma(\delta)}\int_0^x t^{\eta}(x-t)^{\delta-1} F\left(\alpha, \beta; \delta; 1-\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt\right\} dx=0. \qquad (2\cdot7)$$

(2·7) में समाकल के क्रम स्थानान्तरण से, जो प्रबिन्धों के अन्तर्गत समाकलों के पूर्ण अभिसरण के कारण बैध है तथा [8, p. 539] की सहायता से x-समाकल का मान निकालने और फिर [2, p. 209 (7)] के बल पर हमें (2·8) प्राप्त होता है।

$$\int_0^\infty t^{-\sigma} f(t)\ G_{0,s}^{s,0}\left[\left(\frac{z}{s}\right)^s t^n \,\middle|\, 0, \frac{1}{s}, \ldots, \frac{s-1}{s}\right] dt=0 \qquad (2\cdot8)$$

(2·8) का G-फलन सक्सेना के सूत्र [7. p. 401 (4)] के फलस्वरूप सरल हो कर

$$s^{-1/2}(2\pi)^{1/2(s-1)}\ G_{0,5}^{1,0}\left[zt^{n/s} \mid 0\right]=\exp\left(-zt^{n/s}\right) \qquad (2\cdot9)$$

हो जाता है।

अतः (2·9)

$$\int_0^\infty t^{-\sigma} f(t) \exp\left(-zt^{n/s}\right) dt=0 \qquad (2\cdot10)$$

या

$$\int_0^\infty t^{(1-\sigma)s/n-1} f(t^{s/n}) \exp(-zt)\, dt=0 \qquad (2\cdot11)$$

में समानीत हो जाता है। चूँकि $t\geqslant0$ में $R(\sigma)<1+\frac{n}{s}$ तथा $f(t)$ संतत है, अतः फलन $t^s(1-\sigma)/n-1$ तथा $f(t^{s/n})$ दोनों ही $t\geqslant0$ में संतत हैं। उनका गुणनफल भी इसी परास में ऐसा ही है। अतएव लर्च के प्रमेय [5, p. 339] के सम्प्रयोग से

$$t^{s/n(1-\sigma)-1} f(t^{s/n})\equiv0\ t\geqslant0 \qquad (2\cdot12)$$

जिसका अर्थ है कि

$$f(t^{s/n})\equiv0\ t\geqslant0 \qquad (2\cdot13)$$

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$f(t)\equiv0\ t\geqslant0. \qquad (2\cdot14)$$

इससे प्रमेय 1 की उपपत्ति पूरी हो जाती है जिससे निम्नांकित अप्रतिम प्रमेय प्रत्यक्षतः प्राप्त होता है।

प्रमेय 2 यदि $f_1(x)$ तथा $f_2(x)$ $x \geqslant 0$ में संतत हों

$$K[\alpha. \beta, \eta, \gamma; f_1(x)] = K[\alpha, \beta, \eta, \gamma : f_2(x)] \tag{2·15}$$

और दोनों समाकल अभिसारी हों तो

$$f_1(x) \equiv f_2(x). \tag{2·16}$$

3. **विलोमन सूत्र: प्रमेय 3** यदि $R[f(x)] = R[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(x)]$

$$= \frac{x^{-\eta-\delta}}{\Gamma(\delta)} \int_0^x t^{\eta}(x-t)^{\delta-1} {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \delta; 1-\frac{t}{x}\right) f(t)\, dt$$

तो $$\frac{1}{2}[f(t+)+f(t_-)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau\to\infty} \int_{c-i\tau}^{c+i\tau}$$

$$\times \frac{\Gamma(\eta+\delta+1-\alpha-s)}{\Gamma(\eta+1-s)\Gamma(\eta+\delta+1-\alpha-\beta-s)}\, t^{-s}\, M\{R[f(x)]\}\, ds, \tag{3·1}$$

जहाँ $M\{R[f(x)]\}$ से $R[f(x)]$ का मेलिन परिवर्त सूचित होता है।

वैधता के प्रतिबन्ध निम्न प्रकार हैं :

(a) $f(t)$ बिन्दु $t=x(x>0)$ के सन्निकट परिवद्ध विचरण वाला है

(b) $f(t) \in L_p(0, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$.

जब $f(t)$ $t=x(x>0)$ पर संतत होता है तो (3·1) का बाम पक्ष $f(t)$ हो जाता है और हमें (3·2) प्राप्त होता है

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau\to\infty} \int_{c-i\tau}^{c+i\tau} \frac{\Gamma(\gamma+\delta+1-\alpha-s)\Gamma(\eta+\delta+1-\beta-s)}{\Gamma(\eta-s+1)\Gamma(\eta+\delta+1-\alpha-\beta-s)}\, t^{-s} \times M\{R[f(x)\}\, ds \tag{3·2}$$

उपपत्ति : [6, p. 34 (3·2)] से

$$M\{R[f(x)] = \frac{\Gamma(\eta-s+1)\Gamma(\eta+\delta+1-\alpha-\beta-s)}{\Gamma(\eta+\delta+1-\alpha-s)\Gamma(\eta+\delta+1-\beta-s)}\, M(f(t)\} \tag{3·3}$$

मेलिन विलोम प्रमेय [9, p. 42] के सम्प्रयोग से तुरन्त ही वांछित फल प्राप्त होता है।

प्रमेय 3 की पुष्टि के लिये माना कि

$$R[f(x)]=e^{-ax}I_{\nu}(ax) \tag{3·4}$$

तो [1 p. 330 (22)] से हमें (3·5) प्राप्त होता है।

$$M\{R[f(x)]\}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)\Gamma(s+\nu)}{(2a)^{s}\pi^{1/2}\Gamma(1+\nu-s)} \tag{3·5}$$

(3·2) में $M\{R[f(x)]\}$ के इस मान को रखने पर

$$f(t)=\frac{1}{\pi^{1/2}}\,G^{1,3}_{3,4}\left[2at\,\middle|\,\begin{matrix}\alpha-\eta-\delta,\ \beta-\eta-\delta,\ 1/2\\ \nu,\ -\nu,\ -\eta,\ \alpha+\beta-\eta-\delta\end{matrix}\right] \tag{3·6}$$

जो G-फलन की परिभाषा के कारण है।

यदि हम $f(t)$ के इस मान को (1·1) में प्रतिस्थापित करें और फल [8, p. 539] का उपयोग करें तो

$$R[f(x)]=\frac{1}{\pi^{1/2}}\,G^{1,1}_{1,2}\left[2ax\,\middle|\,\begin{matrix}1/2\\ \nu,\ -\nu\end{matrix}\right] \tag{3·7}$$

प्राप्त होता है और अन्त में [1, p. 374] से

$$R[f(x)]=e^{-ax}I_{\nu}(ax)$$

प्राप्त होता है। इससे विलोम सूत्र (3·2) की पुष्टि हो जाती है।

इसी प्रकार की विधि का पालन करके निम्नांकित प्रमेय की स्थापना की जा सकती है।

प्रमेय 4 यदि $K[f(x)]=K[\alpha,\beta,\eta,\gamma:f(x)]$

$$=\frac{x^{\eta}}{\Gamma(\gamma)}\int_{x}^{\infty}t^{-\eta-\gamma}(t-x)^{\gamma-1}F\left(\alpha,\beta;\gamma;1-\frac{x}{t}\right)f(t)\,dt$$

तो

$$\frac{1}{2}[f(t_{+})+f(t_{-})]=\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{c-iT}^{c+iT}$$

$$\frac{\Gamma(\eta+\gamma+s-\alpha)\Gamma(\eta+\gamma+s-\beta)}{\Gamma(\eta+s)\Gamma(\eta+\gamma+s-\alpha-\beta)}\,t^{-s}\,M\{K[f(x)]\}\,ds \tag{3·8}$$

जहाँ $f(t)$ बिन्दु $t=x(x>0)$ के पार्श्वर्त में परिबद्ध विचरण वाला है।

यदि $f(t)$ $t=x(x>0)$ पर संतत हो तो (3·8) का बाम पक्ष

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\tau\to\infty}\int_{c-i\tau}^{c+i\tau}\frac{\Gamma(\eta+\gamma+s-\alpha)\Gamma(\eta+\gamma+s-\beta)}{\Gamma(\eta+s)\Gamma(\eta+\gamma+s-\alpha-\beta)}\,t^{-s}M\{K[f(x)]\}\,ds. \quad (3\cdot9)$$

4. सार्वीकृत कोबर संकारकों तथा हैंकेल परिवर्त के मध्य सम्बन्ध

फलन $f(t)$ का हैंकेल परिवर्त समाकल समीकरण

$$H_\lambda[f:z]=\int_0^\infty t\,J_\lambda(tz)f(t)\,dt \quad (4\cdot1)$$

द्वारा परिभाषित होता है जहाँ $z>0$

इस अनुभाग में हम भिन्नात्मक समाकलन संकारकों R तथा K का सम्बन्ध $f(t)$ के हैंकेल परिवर्त के साथ प्राप्त करेंगे। प्रमुख फल दो प्रमेयों के रूप में व्यक्त हैं।

आगे निम्नांकित फलों की आवश्यकता पड़ेगी :

$$R[\alpha,\beta,\eta,\delta,J_\lambda(xz)] \quad (4\cdot2)$$

$$=\frac{1}{2}H_{2,4}^{1,2}\left[\frac{1}{2}zx\,\middle|\,\begin{matrix}(-\eta,1),(\alpha+\beta-\eta-\delta,1)\\ \left(\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2}\right),(\alpha-\eta-\delta,1),(\beta-\eta-\delta,1)\end{matrix}\right]$$

तथा

$$K[\alpha,\beta,\eta,\gamma,J_\lambda(xz)] \quad (4\cdot3)$$

$$=\frac{1}{2}H_{2,4}^{3,0}\left[\frac{1}{2}zx\,\middle|\,\begin{matrix}(\eta+\gamma-\alpha,1),(\eta+\gamma-\beta,1)\\ (\eta,1),(\eta+\gamma-\alpha-\beta,1),\left(\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2}\right)\end{matrix}\right]$$

जहाँ $R(\eta+\lambda)>0$ तथा $z>0$,

प्रमेय 5 यदि f तथा $H_\lambda[f:z]$ का सम्बन्ध $L_p(0,\infty)$ से हो तथा यदि $Re\,(\eta+\lambda)>0$, $Re\,(\delta)>0$, $Re\,(\eta+\delta-\alpha-\beta+\lambda)>0$ तथा $z>0$, तो

$$R[\alpha,\beta,\eta,\delta:f(x)]=\int_0^\infty\phi(x:z)H_\lambda[f:z]\,dz \quad (4\cdot4)$$

जहाँ

$$\phi(x:z)=\frac{z}{2}H_{2,4}^{1,2}\left[\frac{1}{2}zx\,\middle|\,\begin{matrix}(-\eta,1),(\alpha+\beta-\eta-\delta,1)\\ \left(\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{\lambda}{2},\frac{1}{2}\right),(\alpha-\eta-\delta,1),(\beta-\eta-\delta,1)\end{matrix}\right] \quad (4\cdot5)$$

उपपत्ति: हैंकेल विलोम प्रमेय [9, p. 52] से

$$f(t)=\int_0^\infty z\, H_\lambda[f: z] J_\lambda(tz)\, dz \tag{4·6}$$

अत:

$$R[\alpha, \beta, \eta, \delta: f(x)]=\int_0^\infty z H_\lambda[f: z]\, R[\alpha, \beta, \eta, \delta: J_\lambda(xz)]\, dz \tag{4·7}$$

प्रमेय में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समाकलन के क्रम में परिवर्तन वैध है।

सूत्र (4·2) के सम्प्रयोग से प्रमेय प्राप्त होता है।

इसी प्रकार (4·3) से निम्नांकित प्रमेय प्राप्त होता है।

प्रमेय 6 यदि f तथा $H_\lambda[f: z]\ L_p(0, \infty)$ से सम्बद्ध हों तथा यदि $Re\,(\eta+\lambda)>0$, $Re\,(\gamma)>0$, $Re\,(\eta+\gamma-\alpha-\beta+\lambda)>0$ तथा $z>0$, तो

$$K[\alpha, \beta, \eta, \gamma: f(x)]=\int_0^\infty \psi(x: z) H_\lambda[f: z]\, dz \tag{4·8}$$

जहाँ

$$\psi(x: x)=\frac{z}{2}\ H_{2,4}^{3,0}\left[\frac{1}{2}\, zx \left| \begin{matrix} (\eta+\gamma-\alpha, 1), (\eta+\gamma-\beta, 1) \\ (\eta, 1), (\eta+\gamma-\alpha-\beta, 1) \left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{matrix} \right.\right] \tag{4·9}$$

5· सार्वीकृत कोबर तथा कोबर संकारकों के मध्य सम्बन्ध

(1·1) तथा (1·2) द्वारा परिभाषित संकारकों को कोबर संकारकों के गुणनफल [4, p. 193], के रूप में व्यक्त किया जावेगा। कोबर संकारक निम्न प्रकार से परिभाषित होंगे।

$$R^*[\alpha, \beta: f(x)]=\frac{x^{-\beta-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (x-t)^{\alpha-1} t^\beta f(t)\, dt \tag{5·1}$$

तथा

$$K^*[\alpha, \beta: f(x)[=\frac{x^\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} t^{-\beta-\alpha} f(t)\, dt \tag{5·2}$$

यदि $M\{f(t)\}$ या $F(s)\, f(t)$ का मेलिन परिवर्त हो तो व्युत्क्रम मेलिन परिवर्त

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i} \int_C F(s)^{-s}\, ds \tag{5·3}$$

होगा जहाँ C जटिल S तल में एक उपयुक्त कंटूर है।

प्रमेय 7 यदि (i) $(\eta+\delta-\alpha-\beta+1)>0$, $(\delta-\alpha)>0$,

(ii) $f(x) \in L(0, \infty)$, (iii) $M\{f(x\}=F(s) \in L\left(\frac{1}{2}-i\infty, \frac{1}{2}+i\infty\right)$,

(iv) $x^{-1/2} R^*[\alpha, \beta : f(x)] \in L(0, \infty)$, (v) $x^{-1/2} R[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(x)] \in L(0, \infty)$

और $y=x$ के निकट परिबद्ध विचरण वाला हो तो

$$R[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(x)]=R^*[\alpha, \eta+\delta-\alpha-\beta\ R^*\{\delta-\alpha, n: f(x)\}] \quad (5\cdot4)$$

उपपत्ति: प्रतिबन्ध (i) तथा (ii) से और [4, p. 193 (5a)] के कारण संकारक R^* तथा K^* का अस्तित्व है और वे $L(0, \infty)$ से सम्बद्ध हैं। (5·3) में संकारक $R^*[\delta-\alpha, \eta: f(x)]$ का सम्प्रयोग करने से

$$R^*[\delta-\alpha, \eta: f(x)]=\frac{t^{-\eta-\delta+\alpha}}{\Gamma(\delta-\alpha)}\int_0^t (t-x)^{\delta-\alpha-1}x^{\eta}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C F(s)x^{-s}\,ds\right\}dx \quad (5\cdot5)$$

चूँकि (5·5) में समाकल पूर्णतया अभिसारी है अत: पहले हम x के प्रति समाकलित करके (5·6) प्राप्त करेंगे।

$$R^*[\delta-\alpha, \eta: f(x)]=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Gamma(\eta-s+1)F(s)}{\Gamma(\eta+\delta-\alpha-\beta+1}\, t^{-s}\,ds \quad (5\cdot6)$$

पुन: संकारक R^*, के सम्प्रयोग से

$$R^*[\alpha, \eta+\delta-\alpha-\beta: R^*\{\delta-\alpha, \eta: f(x)\}] \quad (5\cdot7)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Gamma(\eta-s+1)\Gamma(\eta+\delta-\alpha-\beta-s+1)F(s)}{\Gamma(\eta+\delta-\alpha-s+1)F(\eta+\delta-\beta-s+1)}\, x^{-s}\,ds$$

[6, p, 34 (3·2)], सम्प्रयोग से

$$R^*[\alpha,\eta+\delta-\alpha-\beta : R^*\{\delta-\alpha, \eta : f(x)\}] \quad (5\cdot8)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C M\{R[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(x)]\, x^{-s}\,ds$$

अन्त में (v) तथा [10, p. 46] से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि

$$R[\alpha, \beta, \eta, \delta: f(x)]=R^*[\alpha, \eta+\delta-\alpha-\beta: R^*\{\delta-\alpha, \eta: f(x)\}].$$

प्रमेय 8 यदि (i) $(\eta+\gamma-\alpha-\beta)>0$, $(\gamma-\alpha)>0$,

(ii) $f(x) \in L(0, \infty)$, (iii) $M\{f(x)\}=F(s) \in L\left(\frac{1}{2}-i\infty\ \frac{1}{2}+i\infty\right)$

(iv) $x^{-1/2}K^*[\alpha, \beta: f(x)] \in L(0, \infty)$, (v) $x^{-1/2} K[\alpha, \beta, \eta, \gamma: f(x)] \in L(0, \infty)$

तथा $y=x$ के निकट परिवद्ध विचरण वाला हो तो

$$K[\alpha, \beta. \eta, \gamma: f(x)]=K^*[\alpha, \eta+\gamma-\alpha-\beta: K^*\{\gamma-\alpha, \eta: f(x)\}] \quad (5\cdot9)$$

उपर्युक्त प्रमेय की उपपत्ति प्रमेय 7 की भाँति है।

6. L तथा L^{-1} संकारकों के रूप में सार्वीकृत कोबर संकारकों का द्योतन $\phi(x)$ के लैप्लास परिवर्त को $L\{\phi(x)\}$ द्वारा व्यक्त करते हैं और

$$L\{\phi(x)\}=\int_0^\infty e^{-xt}\,\phi(x)\,dx=\psi(t) \quad (6\cdot1)$$

द्वारा परिमाषित करते हैं। (6 1) में $\phi(t)$ तथा $\psi(t)$ जिस प्रकार सम्बन्वित हैं उससे $\psi(t)$ का विलोम लैप्लास परिवर्त L^{-1} को निम्नवत् लिखा जा सकता है।

$$L^{-1}\{\psi(t)\}=\phi(t) \quad (6\cdot2)$$

प्रमेय 9 यदि (i) $(\eta+\delta-\alpha-\beta+1)>0$, $(\delta-\alpha)>0, \eta>0$, (ii) $f(x)\in L(0, \infty)$, (iii) $x^{-1/2}f(x)\in L(0, \infty)$, जहाँ $f(y)$ बिन्दु $y=x$ के समीप परिवद्ध विचरण वाला है (iv) $M\{f(x)\}=F(s)\in L(\frac{1}{2}-i\infty, \frac{1}{2}+i\infty)$ तथा (v) $x^{-1/2}\,R[f(x)]\in L(0, \infty)$ और $y=x$ के निकट परिबद्ध विचरण वाला है तो

$$x^{-\beta-\eta-\delta}L^{-1}[t^{-\alpha}L\{x^{-\beta}L^{-1}[t^{\alpha-\delta}\delta L\{x^{\eta}f(x)\}]\}]$$
$$=R[\alpha, \beta, \eta, \delta: f(x)] \quad (6\cdot3)$$

उपपत्ति: प्रमेय 9 के (i) तथा (ii) प्रतिबन्धों और (1·3) से $R[f(x)]$ तथा $K[f(x)]$ दोनों विद्यमान हैं और सम्बद्ध हैं तथा (3·3) भी सत्य है। (iii) तथा (5·3) से हमें

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C F(s)x^{-s}\,ds \quad (6\cdot4)$$

प्राप्त होता है जहाँ C रेखा $\sigma=\frac{1}{2}$ है।

x^{-s} की अपेक्षा x^s का व्यवहार सुगम है अतः (6·4) में हम s के स्थान पर $(1-s)$ रखते हैं और तब संकारक Lx^{η} का प्रयोग करते हैं। प्राप्त फल इस प्रकार हैं:

$$L\{x^{\eta}f(x)=\int_0^\infty e^{-xt}x^{\eta}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C F(1-s)x^{s-1}\,ds\right\}dx \quad (6\cdot5)$$

रेखा $s=\frac{1}{2}+i\tau$, पर x के घातांक का मुख्य अंग $\eta-\frac{1}{2}$ है। (iv) से हम सरलता से निगमन करते हैं कि $F(1-s)\in L(\frac{1}{2}-i\infty, \frac{1}{2}+i\infty)$ तथा (i) से $\eta-\frac{1}{2}>-\frac{1}{2}$ अतः (6·5) में द्विगुण समाकल पूर्णतया अभिसारी है। फिर हम पहले x के प्रति समाकलित कर सकते हैं जिससे (6·6) की प्राप्ति होगी।

(6·6) से हमें (6·7) मिलता है।

$$L^{-1}[t^{\alpha-\delta} L\{x^{\eta} f(x)\}] \tag{6·7}$$

$$=L^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Gamma(\eta+\delta-\alpha+s)\Gamma(\eta+s)}{\Gamma(\eta+\delta-\alpha+s)}\, t^{-\eta-\delta+\alpha-s}\, F(1-s)\, ds\right].$$

चूंकि [3, p. 3000 (4) के 2] में दिये गये प्रमेय के प्रतिबंध संतुष्ट हो जाते हैं अतः हमें (6·8) प्राप्त होता है

$$L^{-1}[t^{\alpha-\delta} L\{x^{\eta} f(x)\}] \tag{6·8}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Gamma(\eta+s)}{\Gamma(\eta+\delta-\alpha+s)}\, x^{\eta+\delta-\alpha+s-1} F(1-s)\, ds$$

पुनः संकारक $Lx^{-\beta}$ के सम्प्रयोग से (6·9) प्राप्त होता है।

$$L\{x^{-\beta} L^{-1}[t^{\alpha-\delta} L\{x^{\eta} f(x)\}]\} \tag{6·10}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Gamma(\eta+s)\Gamma(\eta+\delta-\alpha-\beta+s)}{\Gamma(\eta+\delta-\alpha+s)}\, t^{-\eta-\delta+\alpha+\beta-s} F(1-s)\, ds$$

इसी प्रकार संकारक $L^{-1}t^{-\alpha}$ के प्रयोग से

$$L^{-1}[t^{-\alpha} L\{x^{-\beta} L^{-1}[t^{\alpha-\delta} L\{x^{\eta} f(x)\}]\}] \tag{6·11}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Gamma(\eta+s)\Gamma(\eta+\delta-\alpha-\beta+s)}{\Gamma(\eta+\delta-\alpha+s)\Gamma(\eta+\delta-\beta+s)}\, x^{\eta+\delta-\beta+s-1} F(1-s)\, ds$$

$$=\frac{x^{\eta+\delta-\beta}}{2\pi i}\int_C M\{R[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(x)]\, F(s) x^{-s}\, ds$$

प्राप्त होते हैं। (6·10) में s के स्थान पर $1-s$ रखने से तथा (3·3) का प्रयोग करने पर (6·10) की ही भाँति कंटूर $\sigma=\frac{1}{2}$ रेखा होता है।

अन्त में निर्देश [10, p. 46] में दिये (v) तथा प्रमेय 29 से, यदि $k=\frac{1}{2}$ तो हमें (6·3) की प्राप्ति होती है।

इससे प्रमेय 9 की उपपत्ति पूरी होती है।

प्रमेय 10 प्रमेय 9 में दिये गये प्रतिबन्धों के साथ, जिसमें अपवादस्वरूप $R[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(x)]$ को $K[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(x)]$ द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया जाता है,

$$x^{1+\beta-\eta-\delta} L^{-1}[t^{-\alpha} L\{x^{-\beta} L^{-1}[t^{\alpha-\delta} L\{x^{\eta-1} f(x)\}]\}]_{x=1/X} \tag{6·12}$$

$$=K[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(X)]$$

यह उपपत्ति प्रमेय 9 की ही भाँति है । संक्षेप में, हम (6·4) से प्रारम्भ करते हैं और x को x^{-1} से प्रतिस्थापित करते हैं । संकारक L तथा L^{-1} से (6·10) की ही भाँति समाकल्य में $\frac{\Gamma(\eta+s)\Gamma(\eta+\delta-\alpha-\beta+s)}{\Gamma(\eta+\delta-\alpha+s)\Gamma(\eta+\delta-\beta+s)}$ प्रवेश होता है ।

अत: [6, p. 34 (3·4)] के फलस्वरूप समाकल्य में $M\{K[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(x)]x^{\eta+\delta-\beta+1}\}$ रहता है । x के स्थान पर $\frac{1}{x}$ रखने पर तथा (6·4) का पुन: उपयोग करने (6·12) की स्थापना हो जाती है ।

7. संकारकों के तात्विक गुण

यहाँ हम संकारक (1·1) तथा (1·2) के कुछ तात्विक गुण दे रहे हैं जो निम्नलिखित परिभाषाओं के फलस्वरूप प्राप्त होते हैं:

$$x^{-1} R[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(x^{-1})] = K[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(x)] \tag{7·1}$$

$$x^{-1} K[\alpha, \beta, \eta, \gamma : f(x^{-1})] = R[\alpha, \beta, \eta, \gamma : f(x)] \tag{7·2}$$

$$x^{\lambda} R[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(x)] = R[\alpha, \beta, \eta-\lambda, \delta : x^{\lambda} f(x)] \tag{7·3}$$

$$x\, K[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(x)] = K[\alpha, \beta, \eta+\lambda, \delta : x^{\lambda} f(x)] \tag{7·4}$$

यदि

$$R[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(x)] = g(x) \tag{7·5}$$

तो $\quad R[\alpha, \beta, \eta, \delta : f(cx)] = g(cx)$

तथा यदि

$$R[\alpha, \beta, \eta, \gamma : f(x)] = \phi(x) \tag{7·6}$$

तो $\quad R[\alpha, \beta, \eta, \gamma : f(cx)] = \phi(cx)]$

(7·5) तथा (7·6) सम्बन्धों से संकारकों की समांगता व्यक्त होती है । इनसे प्रकट होता है कि चाहे x, y या $t=xy$ के प्रति कैसे भी प्रयुक्त क्यों न किया जाय, दिये हुये फलन $f(x)$ पर कोई अन्तर संकारकों को नहीं आता ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय प्रो० आर० एस० कुशवाहा के अत्यन्त आभारी हैं जिन्होंने हमें प्रोत्साहित किया । लेखकों में से एक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग के प्रति आर्थिक सहायता प्रदान करने के हेतु आभार प्रकट करता है ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि Tables of Integral transforms, **भाग I, मैकग्रहिल न्यूयार्क** 1953
2. वही, Higher Transcendental Functions, **भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क** 1953
3. फाक्स, सी० , **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1971, **29**, 289-306
4. कोबर, एच०, **क्वार्ट० जर्न० मैथ०, आक्सफोर्ड, जिल्द** II, 1940, 193-211
5. लर्च, ई० , **एक्टा मैथ०, स्टाकहाम**, 1903, **27**, 339
6. सक्सेना, आर० के० तथा कुम्भात, आर० के०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1973, **16**, 31-36
7. सक्सेना, आर० के०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइं० इंडिया**, 1950, **26A**, 400-413
8. शर्मा, के० सी०, **प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०**, 1964, **60**, 539-42
9. स्नेडान, आई० एन०, Fourier Transforms, **मैकग्राहिल बुककम्पनी**, 1951
10. टिश्मार्श ई० सी०, Introduction to the theory of Fourier integrals, **क्लेरंडन प्रेस, आक्सफोर्ड**, 1937

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No 2, April, 1975, Pages 151-163

मृदा में लौह तथा मैंगनीज की उपलब्धता को प्रभावित करने वाले विभिन्न कारक

शिवगोपाल मिश्र
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय
तथा
श्याम सुन्दर त्रिपाठी
रसायन विभाग, ब्रह्मानन्द महाविद्यालय, राठ (हमीरपुर)

[प्राप्त—दिसम्बर 5, 1974]

सारांश

उत्तर प्रदेश के बुन्देलखण्ड क्षेत्र की मिट्टियाँ प्रदेश में पाई जाने वाली मिट्टियों से बहुत कुछ भिन्न हैं। इन मिट्टियों पर आर्द्रता, कार्बनिक पदार्थ, कैल्सियम कार्बोनेट, सोडियम बाइकार्बोनेट तथा ई० डी० टी० ए० का प्रभाव देखा गया। इससे यह परिणाम निकला कि मिट्टियों की जलानुविद्ध स्थिति में लौह तथा मैंगनीज दोनों की उपलब्धता बढ़ जाती है; किन्तु अधिक दिनों तक जलानुविद्ध होने पर उपलब्धता काफी घट जाती है। रांकड़ मिट्टियों में विनिमयशील मैंगनीज घटता है; किन्तु अन्य मिट्टियों में यह प्रारंभ में बढ़ता है, फिर लगभग 30 दिन बाद घटता है। अपचेय मैंगनीज लाल मिट्टियों में घटता है; किन्तु काली मिट्टियों में 30 दिन तक बढ़ता है, फिर घटता है। कार्बनिक पदार्थ मिलाने से विनिमयशील लौह (Fe^{++}) तथा मैंगनीज (Mn^{++}) दोनों की उपलब्धता बढ़ती है और समयान्तर पर घट जाती है। प्रयुक्त कार्बनिक पदार्थ (ग्लूकोस) की मात्रा में वृद्धि करने पर रांकड़ तथा मार मिट्टियों में लौह (Fe^{++}) तथा मैंगनीज (Mn^{++}) दोनों की मात्राओं में वृद्धि होती है; किन्तु पड़ुआ तथा काबर (चिकनी) मिट्टियों में इन दोनों की मात्राओं में कमी आ जाती है। कैल्सियम कार्बोनेट मिलाने पर प्रारंभ में दोनों की मात्राओं में वृद्धि होती है किन्तु समय बीतने पर मैंगनीज की उपलब्धता शून्य हो जाती है। लौह की उपलब्धता पड़ुवा तथा काबर मिट्टियों में कम नहीं होती। सोडियम बाइकार्बोनेट के प्रभाव से भी समयान्तर में दोनों पोषक तत्वों की उपलब्धता शून्य हो जाती है। कीलेटीकारक यौगिक ई० डी० टी० ए० को मिट्टियों में मिलाने पर मैंगनीज (Mn^{++}) की अपेक्षा लौह (Fe^{++}) की मात्रा में अधिक वृद्धि होती है। काली मिट्टियों में जल विलेय मैंगनीज मुक्त नहीं हो पाता। पड़ुवा तथा काबर मिट्टियों में लौह की अधिक वृद्धि होती है जबकि रांकड़ तथा मार मिट्टियों में मैंगनीज की वृद्धि होती है।

Abstract

Factors affecting the availability of iron and manganese in soils. *By* S.G. Misra, Chemistry Department, Allahabad University and S. S. Tripathi, Chemistry Department, B. N. V. College, Rath, U. P.

Effect of moisture, organic matter, calcium carbonate, sodium bicarbonate and E.D.T.A. on the availability of iron and manganese in the soils of Bundelkhand region of U. P. was studied. Moisture and organic matter help in increasing the soil iron and manganese but there is decrease as time of incubation increases. On the other hand calcium carbonate and sodium carbonate decrease the availability of iron and manganese. E.D.T.A. increases the availability of iron and manganese but the availability of former is more than the latter.

लौह तथा मैंगनीज जैसे महत्वपूर्ण पोषक तत्वों की उपलब्धता को प्रभावित करने वाले विभिन्न कारकों के प्रभावों पर बहुत से वैज्ञानिकों ने अध्ययन किया है। अय्यर[1], बासक तथा भट्टाचार्य[2], क्लार्क आदि[3], मण्डल[4], सावंत तथा एलिस[5] आदि ने बताया कि जल तथा कार्बनिक पदार्थ का लौह तथा मैंगनीज की उपलब्धता पर लाभकारी प्रभाव पड़ता है; किन्तु मेहता तथा पटेल[6] ने देखा कि मृदाओं के सूखने पर विनिमयशील मैंगनीज की मात्राओं में वृद्धि होती है। लिंडसे तथा थार्न[7], रयान, ली तथा पीबल्स[8] ने बताया कि अधिक जल से लौह की मात्रा बढ़ती है; किन्तु चूनामयी मिट्टियों में अधिक जल सिंचन ही लौह पीतिमा (Iron chlorosis) का प्रमुख कारण होता है। मिश्रा तथा मिश्रा[9] ने देखा कि मृदा में ग्लूकोस मिलाने से विनिमयशील मैंगनीज की मात्रा में वृद्धि होती है, किन्तु अपचेय मैंगनीज की मात्रा में कमी आ जाती है। रंधावा[10], मित्तल तथा राय[11] मिश्रा तथा मिश्रा[9] ने देखा कि मृदा में कैल्सियम कार्बोनेट बढ़ाने से द्विसंयोजी मैंगनीज की मात्रा में कमी आ जाती है। इसके विपरीत दुबे तथा उनके साथियों[12] ने बिहार की चूनाधिक मिट्टियों में उपलब्ध लौह की मात्राओं में वृद्धि देखी। ग्रेस मेनिस तथा लीपर[13] ने मृदा में लौह-ई० डी० टी० ए० का प्रयोग करके मैंगनीज के विषैले प्रभाव को कम किया। नेजेक तथा ग्रीनर्ट[14] ने देखा कि चाहे मृदा में लौह-ई० डी० टी० ए० मिलाया जाय या मैंगनीज-ई० डी० टी० ए०, मैंगनीज का मात्रा में कमी आती है तथा लौह की मात्रा बढ़ती है। हाल्मेस तथा ब्राउन[15] ने बताया कि लौह-ई० डी० टी० ए० के साथ कीलेट यौगिक बनाता है जो मृदा में लौह की कमी को दूर करता है। सोडियम बाइकार्बोनेट के कारण भी लौह तथा मैंगनीज की उपलब्धता पर बुरा प्रभाव पड़ता है। पोर्टर तथा थार्न[16] ने बताया कि लौह की उपलब्धता में बाइ-कार्बोनेट आयनों (HCO'_3) के कारण व्यतिक्रम पैदा होता है।

उत्तरप्रदेश का बुन्देलखण्ड क्षेत्र हमीरपुर, बाँदा, झाँसी जालौन तथा ललितपुर जिलों से मिलकर बना है। यहाँ लाल तथा काली मिश्रित मिट्टियाँ पाई जाती हैं, जिन्हें स्थानीय रूप से पड़वा, रांकड़ (लाल मिट्टियाँ), मार तथा काबर (काली मिट्टियाँ) नाम से पुकारते हैं। ये मिट्टियाँ प्रदेश की अन्य मिट्टियों से भौतिक-रासायनिक गुणों मे बहुत कुछ भिन्न हैं। इन मिट्टियों में पाये जाने वाले

लौह् तथा मैंगनीज पोषक तत्वों की उपलब्धता पर विभिन्न कारकों के प्रभावों पर अभी तक कोई विस्तृत अध्ययन नहीं हुआ है, अतः प्रस्तुत अध्ययन इसी दृष्टि से किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिये बुन्देलखण्ड की चारों प्रकार की मिट्टियाँ (पड़ुवा, रांकड़, मार, काबर) प्रयुक्त की गई हैं। खेतों से इन मिट्टियों को लाकर हवा में सुखाया गया; फिर उन्हें पीस और छानकर स्वच्छ काँच की बोतलों में संग्रहीत किया गया।

इन मिट्टियों में पी-एच, कैल्सियम कार्बोनेट, विनिमयशील कैल्सियम, कार्बनिक पदार्थ, धनायन विनिमय क्षमता का निश्चयन किया गया। जल विलेय, विनिमयशील, अपचेय मैंगनीज की मात्राओं का निश्चयन रंगमापी पर जैकसन (1958) द्वारा वर्णित परआयोडेट विधि द्वारा तथा लोह् (Fe^{++}) का निर्धारण आर्थोफिनॉन्थ्रोलीन द्वारा किया गया। जलविलेय मैंगनीज + विनमयशील मैंगनीज + अपचेय मैंगनीज के योग को सक्रिय मैंगनीज माना गया है।

कारकों का प्रभाव

1. आर्द्रता का प्रभाव

चारों प्रकार की मिट्टियों की 50-50 ग्राम मात्रा कांच के चार चार बीकरों में ली गई। इन मिट्टियों में आसुत जल मिलाकर जल की मात्रा लगभग 50 प्रतिशत कर दी गई। इसी प्रकार अन्य बीकरों मे इतना आसुत जल मिलाया गया कि मिट्टियाँ जल में पूर्ण रूप से डूबी रहें तथा जल स्तर मिट्टी के कुछ ऊपर बना रहे। वाष्पीकरण द्वारा होने वाली जल की क्षति को समय समय पर आसुत जल मिलाकर पूरा किया गया जिससे जल स्तर एकसमान बना रहे। 15, 30 तथा 60 दिनों के अन्तर से इन आठों बीकरों से पाँच पाँच ग्राम मिट्टियों के नमूने निकाल कर रंगमापी विधि द्वारा जलविलेय, विनमयशील तथा अपचेय मैंगनीज तथा विनिमयशील फेरस लौह् की मात्राओं का निर्धारण किया गया। इस प्रकार निर्धारित मैंगनीज के विभिन्न प्रकारों तथा फेरस लौह् (Fe^{++}) की मात्राओं में मूल मिट्टी (खेत की मिट्टी) में उपस्थित विभिन्न मैंगनीज़ तथा फेरस लौह् की मात्राओं से जो अन्तर आया वही जल के प्रभाव को प्रदर्शित करता है।

2. कार्बनिक पदार्थ का प्रभाव

चारों प्रकार की मिट्टियों की 50-50 ग्राम मात्रा काँच के बीकरों में लेकर 0·25 तथा 0·5 ग्राम ग्लूकोस मिलाया गया। समय समय पर आसुत जल मिलाकर मृदा में जल की मात्रा लगभग 50 प्रतिशत रखी गई। 15, 30 और 60 दिनों के सम्पर्क के बाद प्रत्येक बीकर में से 5 ग्राम मिट्टी निकाल कर पहले की भाँति मैंगनीज के विभिन्न प्रकारों तथा फेरस लौह् की मात्राओं का रंगमापी द्वारा निर्धारण किया गया। इस प्रकार ग्लूकोस से उपचारित मिट्टियों में जो मैंगनीज तथा लौह् की वृद्धि अथवा कमी हुई वह कार्बनिक पदार्थ के प्रभाव को प्रदर्शित करती है।

3. कैल्सियम कार्बोनेट का प्रभाव

चारों प्रकार की 50-50 ग्राम मिट्टियों में 1% तथा 2% कैल्सियम कार्बोनेट मिश्रित किया गया। मृदा में जल की मात्रा लगभग 50 प्रतिशत रखी गई। 30 दिन तथा 60 दिनों के बाद 5-5 ग्राम मिट्टी निकालकर मैंगनीज के विभिन्न प्रकारों और फेरस लौह की मात्रा में वृद्धि अथवा कमी को रंगमापी विधि द्वारा ज्ञात किया गया।

4. सोडियम बाइकार्बोनेट का प्रभाव

चारों प्रकार की मिट्टियों के 50-50 ग्राम में 0·5 प्रतिशत तथा 1 प्रतिशत सोडियम बाइ कार्बोनेट मिलाया गया। मिट्टियों मे जल की मात्रा लगभग 50 प्रतिशत रखी गयी। 15, 30 तथा 60 दिनों बाद प्रत्येक मिट्टी में से 5-5 ग्राम नमूने निकाल कर पहिले की भाँति रंगमापी विधि द्वारा मैंगनीज के विभिन्न प्रकारों का तथा फेरस लौह का निर्धारण किया गया। मूल मिट्टी में उपस्थित विभिन्न मैंगनीज के प्रकारों और लौह की मात्राओं से इसमें जो अन्तर आया वही सोडियम बाइकार्बोनेट का प्रभाव है।

5. ई० डी० टी० ए० का प्रभाव

चारों प्रकार की 50-50 ग्राम मिट्टियों में 0·025 ग्राम तथा 0·05 ग्राम ई० डी० टी० ए० (आसुत जल में विलयन के रूप में) मिलाया गया। 15, 30 तथा 60 दिनों के अन्तर पर प्रत्येक में से पांच ग्राम मिट्टी निकाल कर रंगमापी विधि द्वारा मैंगनीज के विभिन्न प्रकारों तथा फेरस लौह की मात्राओं का निर्धारण किया गया। लौह तथा मैंगनीज की मात्राओं में ई० डी० टी० ए० मिलाने पर जो अन्तर आया वही ई० डी० टी० ए० का प्रभाव है।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1

प्रयुक्त मिट्टियों के कतिपय रासायनिक अवयव

मिट्टियाँ		पी-एच मान	कार्बनिक कार्बन%	कैल्सियम कार्बोनेट %	विनिमयशील Ca^{++} *me*/100 ग्राम मृदा	धनायन विनिमय क्षमता *me*/100ग्राम मृदा	मैंगनीज के विभिन्न प्रकार (प्रति दस लक्षांश)				विनिमयशील फेरस लौह (Fe^{++}) प्रति दस लक्षांश
							जल विलेय	विनिमय-शील	अपचेय	सक्रिय	
लाल मिट्टियाँ	→पड़ुआ	7·8	0·204	1·275	7·85	10·85	00	8	105	113	3
	→राँकड़ A	7·9	0·34	0·85	11·6	12·45	00	22	162	184	4
	B	7·9	0·46	1·075	20·0	8·00	00	12	125	137	4
काली मिट्टियाँ	→मार	7·8	0·64	0·75	29·67	31·2	00	20	265	285	3·5
	→काबर	8·2	0·408	1·175	15·00	18·1	00	12	203	215	4

जल का प्रभाव

सारणी 2 में दिये गये परिणामों के सूक्ष्म विश्लेषण से ज्ञात होता है कि मिट्टियों के जलानुविद्ध (water logged) होने पर जल विलेय, विनमयशील मैंगनीज (Mn^{++}) तथा विनमयशील द्विसंयोजी लौह (Fe^{++}) की मात्राओं में वृद्धि होती है, किन्तु मृदाओं के 15 दिन तक जलानुविद्ध रहने पर ये मात्रायें शून्य हो जाती हैं। रांकड़ मिट्टी में विनमयशील मैंगनीज की मात्रा में कमी आती है। अपचेय मैंगनीज तथा सक्रिय मैंगनीज लाल मिट्टियो में घटता है; किन्तु काली मिट्टियों में इसकी मात्रा प्रारंभ में बढ़ती है और 15 दिन बाद घटने लगती है। यह कमी संभवतः लौह के हाइड्राक्साइड के रूप में स्थिरीकरण के कारण होती है। जलानुविद्ध मिट्टियों में अपचायक अवस्था उत्पन्न होने से लौह तथा मैंगनीज के उच्च आक्साइड विलेय तथा उपलब्ध निम्न आक्साइडों में अवकृत हो जाते हैं। कार्बनिक पदार्थ के विच्छेदन से उत्पन्न कार्बन डाइआक्साइड इस कार्य में सहायता करती है। लाल मिट्टियों को जलानुविद्ध करके देखा गया है कि इस अवस्था में उनका पी-एच मान शनैः शनैः बढ़ता जाता है और क्षारीय अवस्था उत्पन्न हो जाती है जिससे लौह तथा मैंगनीज दोनों ही हाइड्राक्साइड के रूप में अवक्षिप्त होने लगते हैं जो बाद में उच्च आक्साइडों में बदलकर अविलेय या अप्राप्य हो जाते हैं। अतः लाल मिट्टियों में अपचेय मैंगनीज तथा रांकड़ में विनमयशील मैंगनीज की मात्राओं में कमी आ जाती है। इसके विपरीत काली मिट्टियों (मार, काबर) के जलानुविद्ध होने पर उनका पी-एच घटता है अतः इन मिट्टियों में अपचेय और सक्रिय मैंगनीज की मात्राओं में वृद्धि होनी स्वाभाविक है क्योंकि पी-एच कम होने पर इनके अविलेय आक्साइड विलेय हो जाते हैं।

कार्बनिक पदार्थ का प्रभाव

सारणी 3 में लिये परिणामों से विदित होता है कि मिट्टी में ग्लूकोस मिलाने से जल विलेय, विनमयशील मैंगनीज तथ विनमयशील लौह (Fe^{++}) की मात्राओं में प्रारंभ में वृद्धि होती है किन्तु 15 दिन बाद इनकी मात्राओं मे कमी आने लगती है। मिट्टी में मिलाये गये ग्लूकोस की सान्द्रता में वृद्धि करने पर रांकड़ और मार मिट्टियों में इनकी मात्राओं में वृद्धि होती है; किन्तु पड़ुवा तथा काबर मिट्टियों में विपरीत प्रभाव पड़ता है। मिट्टियों में ग्लूकोस मिश्रित करने पर यह सूक्ष्मजीवाणुओं द्वारा विच्छेदित हो जाता है और कुछ कार्बनिक अम्लों यथा 2-कीटो ग्लूकोनिक अम्ल, सिट्रिक अम्ल, टार्टेरिक अम्ल मैलिक अम्ल, तथा आक्सैलिक अम्ल को जन्म देता है जिससे मृदा का पी-एच मान कम होकर लौह तथा मैंगनीज को विलेय बनाता है फलतः जल विलेय, विनमयशील मैंगनीज तथा विनमयशील द्विसंयोजी लौह की मात्राओं में वृद्धि होती है। साथ ही साथ अपचेय मैंगनीज की मात्रा में कमी आती है। क्रिस्टेन्सन, टोथ तथा बियर'[5] ने भी बताया कि ग्लूकोस मैंगनीज के उच्च आक्साइडों को विलेय बनाता है। ग्लूकोस की अधिक मात्रा काबर तथा पड़ुवा मिट्टियों में लौह तथा मैंगनीज के साथ संकर निर्मित करती है। काबर तथा पड़ुवा मिट्टियों की मृत्तिका प्रकृति इस कार्य में और अधिक सहायक है अतः ग्लूकोस की अधिक सान्द्रता लौह (Fe^{++}) तथा मैंगनीज (Mn^{++}) दोनों को अनुपलब्ध बना देती है। प्रारंभ में मैंगनीज मृदा कोलाइडी जटिल से अधिक लौह (Fe^{++}) को विस्थापित करता है अतः लौह-मैंगनीज (Fe^{++}/Me^{++}) अनुपात भी बढ़ता है परन्तु समयान्तर पर मैंगनीज की आक्सीकरण प्रकृति लौह की उपलब्धता पर विपरीत प्रभाव डालती है और Fe^{++}/Mn^{++} अनुपात घटने लगता है।

सारणी 2

लौह तथा मैंगनीज की उपलब्धता पर जल का प्रभाव

मिट्टियों में जल की मात्रायें	जल विलेय मैंगनीज (प्रति दस लक्षांश)			विनमयशील मैंगनीज प्रति दस लक्षांश			अपचेय मैंगनीज (प्रति दस लक्षांश)			सक्रिय मैंगनीज (प्रति दस लक्षांश)			विनमयशील फेरस (Fe^{++}) लौह (प्रति दस लक्षांश)		
	दिन 15	30	60	15	30	60	15	30	60	15	30	60	15	30	60
पड़ुवा															
मूल मिट्टी	0	0	0	8	8	8	105	105	105	113	113	113	3	3	3
50% नमी	5	0	0	10	10	5	80·5	107	102·5	95·5	117	107	11	11	5
जलानुविद्ध	16	0	0	10	10	0	83·5	87.5	90	109·5	97·5	90	12	9·5	15
रांकड़															
मूल मिट्टी	0	0	0	12	22	22	162	162	162	184	184	184	4	4	4
50% नामी	17·5	2·5	0	11	5	7	86	150	117·5	114·5	157·5	124·5	14	5	7
जलानुबिद्ध	17·5	0	2·5	11	11	11	117·5	103	117·5	146	118	131	1·5	7	25
मार															
मूल मिट्टी	0	0	0	15	15	15	187	187	187	202	202	202	4	4	4
50% नमी	12·5	2·5	0	17·5	25	17·5	187	267	247	216	294	264 5	14	8·5	15
जलानुबिद्ध	24	11	0	24	25	24	233	187·5	150	281	223·5	174	22	8·5	1
काबर															
मूल मिट्टी	0	0	0	12	12	12	203	203	203	215	215	215	4	2	4
50% नमी	20	10	0	17·5	17·5	2·5	205	205	143	242·5	257·5	144-5	22	5·5	17·5
जलानुविद्ध	20	17·5	7	24	30	2·5	255	280	248	299	327·5	257·5	29·5	26	12

सारणी 3

लौह तथा मैंगनीज की उपलब्धता पर ग्लूकोस का प्रभाव

मिट्टियों में मिलाई गई ग्लूकोस की मात्रायें	मैंगनीज के विभिन्न प्रकार (प्रति दस लक्षांश)												विनमयशील फेरस लौह (Fe^{++}) (प्रति दस लक्षांश)		
	जल विलेय 1			विनमयशील 2			अपचेय 3			सक्रिय 4					
दिन	15	30	60	15	30	60	15	30	60	15	30	60	15	30	60
पड़वा															
मूल मिट्टी	0	0	0	8	8	8	105	105	105	113	113	113	3	3	3
0·5% ग्लूकोस	30	0	0	23	45	8	102	115	93·5	155	167	101·5	22	8·5	2·5
1% ग्लूकोस	30	0	0	35	45	23·5	102	112·5	80·5	167	157·5	104	20	8·5	2·5
रांकड़															
मूल मिट्टी	0	0	0	22	22	22	162	162	162	184	184	184	4	4	4
0·5% ग्लूकोम	42	11	0	110	125	25	86	93	106	238	229	131	32	8·5	2·5
1% ग्लूकोस	44	11	2·5	125	140	93	80	78	61·5	249	229	157	40	8·5	2·5
मार															
मूल मिट्टी	0	0	0	15	15	15	187	187	187	202	202	202	4	4	4
0·5% ग्लूकोस	36	0	0	90	117	87·5	142	130·5	182·5	268	247·5	270	39	14·5	19·5
1% ग्लूकोस	42	10	7·5	108	117	35	136·5	112	112·5	286·5	229·5	155	43·5	8·5	13·5
काबर															
मूल मिट्टी	0	0	0	12	12	12	203	203	203	213	215	215	4	4	4
0·5% ग्लूकोस	35	2·5	0	74	92·5	36	200·3	193·5	309	309	390	229·5	16·5	6	16·5
1% ग्लूकोस	35	0	0	77·5	55	48	117	213	255	229·5	278	303	15·5	82	22·5

सारणी 4

लौह तथा मैंगनीज की उपलब्धता पर कैल्सियम कार्बोनेट का प्रभाव

मिट्टियों में मिश्रित कैल्सियम कार्बोनेट की मात्रायें	मैंगनीज के विभिन्न प्रकार (प्रति दस लक्षांश) जल विलेय (1)		विनमयशील (2)		अपचेय (3)		सक्रिय (1+2+3)		विनमयशील द्विसंयोजी (Fe^{++}) लौह (प्रति दस लक्षांश)	
दिन	30	60	30	60	30	60	30	60	30	60
पड़ुवा										
मूल मिट्टी	0	0	8	8	105	105	113	113	3	3
1% कैल्सियम कार्बोनेट	0	0	9·5	0	110	103	119·5	103	5	8
2% कैल्सियम कार्बोनेट	0	0	0	0	90	100	90	100	7	9
राकड़										
मूल मिट्टी	0	0	22	22	162	162	184	184	4	4
1% कैल्सियम कार्बोनेट	0	0	29	4	134	112	163	116	7	0
2% कैल्सियम कार्बोनेट	2	0	30	2	170	122	202	124	7	0
मार										
मूल मिट्टी	0	0	15	15	187	187	202	202	4	4
1% कैल्सियम कार्बोनेट	0	0	24	0	225	212·5	251	212·3	7·5	0
2% कैल्सियम कार्बोनेट	2	0	24	0	244	202	268	202	5	4
काबर										
मूल मिट्टी	0	0	12	12	203	203	215	215	4	4
1% कैल्सियम कार्बोनेट	0	0	14	0	260	232	274	232	6	8
2% कैल्सियम कार्बोनेट	0	0	16	0	254	220	270	220	6	10

सारणी 5

लौह तथा मैंगनीज की उपलब्धता पर सोडियम बाइकार्बोनेट का प्रभाव

मिट्टी में मिलाई गई सोडियम बाइकार्बोनेट की मात्रायें	मैंगनीज के विभिन्न प्रकार (प्रति दस लक्षांश)												विनमयशील लौह (Fe^{++}) (प्रति दस लक्षांश)		
	जलविलेय 1			विनमयशील 2			अपचेय 3			सक्रिय 4					
दिन	15	30	60	15	30	60	15	30	60	15	30	60	15	30	60
पड़ुवा															
मूल मिट्टी	0	0	0	8	8	8	105	105	105	113	113	113	3	3	3
0·5% सोडियम बाइकार्बोनेट	0	0	0	0	8·5	2·5	176·9	91·5	67.1	176·9	100	69·6	0	0	0
1% सोडियम वाइकार्बोनेट	0	0	0	0	8·5	0	189·1	91·5	61	189·1	100	61	0	5	0
रांकड़															
मूल मिट्टी	0	0	0	12	12	12	125	125	125	137	137	137	4	4	4
0·5% सोडियम बाइकार्बोनेट	0	0	0	17·7	9	9	152·5	112·8	61	179·5	121·8	69	0	0	0
1% सोडियम बाइकार्बोनेट	0	0	0	0	3	0	158·6	85·8	54·9	158·6	88·4	54·9	0	0	5
मार															
मूल मिट्टी	0	0	0	15	15	15	187	187	187	202	202	202	4	4	4
0·5% सोडियम बाईकार्बोनेट	0	0	0	0	0	0	91·3	170·8	176·9	91·5	170·8	170·9	0	0	0
1% सोडियम बाइकार्बोनट	0	0	0	0	0	0	103·7	170·8	176·9	103·5	170·8	176·9	0	0	0
काबर															
मूल मिट्टी	0	0	0	12	12	12	203	203	203	215	215	215	4	4	4
0·5% सोडियम बाइकार्बोनेट	0	0	0	0	0	0	91·5	183	180·3	91·5	183	180·3	0	5	0
1% सोडियम बाइकार्बोनेट	0	0	0	0	0	0	103·7	134·2	97·2	103·7	134·2	98·6	0	0	0

सारणी 6

लौह तथा मैंगनीज की उपलब्धता पर ई० डी० टी० ए० का प्रभाव

मिट्टी में मिलाई गई ई० डी० टी० ए० की मात्रायें	मैंगनीज के विभिन्न प्रकार (प्रति दस लक्षांश) जल विलेय 1			विनमयशील 2			अपचेय 3			सक्रिय 1+2+3			विनमयशील लौह (Fe^{++}) प्रति दस लक्षांश		
दिन	15	30	60	15	30	60	15	30	60	15	30	60	15	30	60
पड़ुवा मिट्टी															
मूल मिट्टी	0	0	0	8	8	8	105	105	105	113	113	113	3	3	3
·05% ई० डी० टी० ए०	24	0	0	8·9	15·2	21·1	73·2	64	85·4	106·1	79·2	106·5	23·7	6·2	12·5
·1% ई० डी० टी० ए०	22	12·2	24·2	21·1	8·9	21·1	97·1	72·3	97·6	140·2	100·4	142·8	23·7	20	20
रांकड़															
मूल मिट्टी	0	0	0	12	12	12	125	125	125	137	137	137	4	4	4
·05% ई० डी० टी० ए०	18·6	3	24·4	33·4	9·2	15·1	103·7	79·3	94·5	155·7	91·5	134	16·5	10	10
·1% ई० डी० टी० ए०	68	6·1	0	6·1	6·1	26·3	82·3	70·2	73·2	156·4	76·5	160·5	8·7	5	27
मार															
मूल मिट्टी	0	0	0	15	15	15	187	187	187	202	202	202	4	4	4
·05% ई० डी० टी० ए०	0	0	0	51·9	0	21·6	183	198	108·3	234·9	198	201·6	8·7	0	10
·1% ई० डी० टी० ए०	0	0	0	62	8·2	24·4	182	192·2	195·2	244	195·4	219·6	3·5	2·5	7·5
काबर															
मूल मिट्टी	0	0	0	12	12	12	203	203	203	215	215	215	4	4	4
·05% ई० डी० टी० ए०	0	0	0	0	6	18	207·4	210·2	158·6	207·4	216·2	176·6	40	6	1·7
·1% ई० डी० टी० ए०	0	0	12·2	36·4	0	24	225·7	192·9	170·8	262·1	190·9	207	57	20	27

कैल्सियम कार्बोनेट का प्रभाव

सारणी 4 में प्रस्तुत परिणामों से स्पष्ट है कि कैल्सियम कार्बोनेट मिलाने से राँकड़ तथा मार मिट्टियों में जल विलेय मैंगनीज की मात्राओं में अल्प वृद्धि होती है किन्तु 30 दिन बाद यह शून्य हो जाती है। पड़ुवा तथा काबर मिट्टियों में कैल्सियम कार्बोनेट से जल विलेय मैंगनीज की मात्राओं मे कोई वृद्धि नहीं आती। विनिमयशील मैंगनीज सभी मिट्टियों में बढ़ता है; किन्तु यह वृद्धि मार मिट्टी में सबसे अधिक तथा पड़ुवा में सबसे कम होती है। इसी प्रकार विनिमयशील फेरस लौह् सभी मिट्टियों में बढ़ता है किन्तु चूनामयी मिट्टी रांकड़ तथा मार में 30 दिन बाद तेजी से कमी आती है जबकि पड़ुवा और काबर मिट्टियों में वृद्धि देखी जाती है। अपचेय मैंगनीज लाल मिट्टियों में घटता है लेकिन काली मिट्टियों में बढ़ता है। मैंगनीज की अपेक्षा लौह् की मात्राओं में वृद्धि अधिक होती है अतः Fe^{++}/Mn^{++} अनुपात भी प्रथम 30 दिनों में वृद्धि करता है। लौह् तथा मैंगनीज की मात्राओं में समयान्तर पर वृद्धि और कमी से यह अनुपात भी परिवर्तित होता जाता है। दुबे तथा उनके साथियों[12] ने भी बिहार की चूनामयी मिट्टियों में उपलब्ध लौह् की उच्च मात्रायें प्राप्त कीं जो कि बुन्देलखण्ड की मिट्टियों में प्राप्त परिणामों के समान हैं।

सोडियम बाईकार्बोनेट का प्रभाव

सारणी 5 में दिये गये आंकड़ों के विश्लेषण से पता चलता है कि मिट्टी में मिलाये गये सोडियम बाइकार्बोनेट के सोडियम आयन (Na^+) मृदा कोलाइडी जटिल से द्विसंयोजी लौह् तथा मैंगनीज को विस्थापित कर देते हैं। मैंगनीज बाइकार्बोनेट लौह् बाइकार्बोनेट की अपेक्षा कम स्थाई है (हीम)[18] अतः मैंगनीज विनमयशील अवस्था में आ जाता है। इसके अतिरिक्त सोडियम बाइकार्बोनेट के कारण मृदा के पी-एच मान में भी वृद्धि होने से इनके अविलेय तथा अप्राप्य हाइड्राक्साइड तथा उच्च आक्साइड बनते हैं अतः लौह् तथा मैंगनीज दोनों की मात्राओं में कमी देखी गई है। पैट्रिक[19] के अनुसार पी-एच में वृद्धि होने से आक्सीकारक-अवकारक विभव घटता है जिससे कुछ उच्चयोजी लौह् तथा मैंगनीज निम्न योजी अवस्था में आ जाते हैं। यही कारण है कि पड़ुवा तथा रांकड़ मिट्टियों में अपचेय मैंगनीज की मात्राओं में वृद्धि होती है तथा सोडियम बाइकार्बोनेट की सान्द्रता में वृद्धि से पड़ुआ मिट्टी में द्विसंयोजी लौह् की मात्रा में अल्प वृद्धि देखी गई है।

ई० डी० टी० ए० का प्रभाव

सारणी 6 में प्रस्तुत परिणामों के अध्ययन से विदित होता है कि मिट्टियों में ई० डी० टी० ए० मिश्रित करने से विनमयशील मैंगनीज तथा लौह् (Fe^{++}) दोनों की वृद्धि होती है। किन्तु 15 दिन बाद काली मिट्टियों में ये मात्रायें कम होने लगती हैं। लौह् (Fe^{++}) की मात्रायें 60 दिन तक रांकड़ तथा मार मिट्टियों में बढ़ती जाती हैं। ई० डी० टी० ए०, मिट्टी के लौह् तथा मैंगनीज के साथ स्थाई संकर बनाता है; किन्तु इस संकर का स्थायित्व मृदा पी-एच, ई० डी० टी० ए० की सान्द्रता तथा अन्य धात्वीय धनायनों की उपस्थिति पर निर्भर करता है। पड़ुवा तथा रांकड़ मिट्टियों में मैंगनीज अस्थाई जटिल बनाता है जिससे जल विलेय मैंगनीज की मात्राओं में वृद्धि होती है। काली मिट्टियों की मृत्तिका प्रकृति के कारण

ई० डी० टी० ए० कार्बन-धात्वीय जटिल बनाता है जो कम विलेय है अत: इन मिट्टियों में जल विलेय मैंगनीज मुक्त नहीं हो पाता। इतना ही नहीं, विनमयशील मैंगनीज भी 15 दिन बाद कम होने लगता है। ई० डी० टी० ए० कुछ अपचेय मैंगनीज को विनमयशील मैंगनीज में बदल देता है अतः काबर मिट्टी को छोड़कर शेष सभी मिट्टियों में अपचेय मैंगनीज की मात्राओं में कमी आ जाती है। सक्रिय मैंगनीज की मात्राओं में वृद्धि होती है यद्यपि पड़ुवा, काबर जैसी मृत्तिका-प्रधान मिट्टियों में अधिक मात्रा में डाला गया ई० डी० टी० ए० ही प्रभावकारी होता है। द्विसंयोजी लौह तथा मैंगनीज पर पड़ने वाले ई० डी० टी० ए० के प्रभावों की तुलना करने पर ज्ञात होता है कि मैंगनीज की अपेक्षा लौह की मात्राओं में अधिक वृद्धि होती है अतः Fe^{++}/Mn^{++} अनुपात ई० डी० टी० ए० मिलाने से बढ़ता है। ई० डी० टी० ए० की सान्द्रता का प्रभाव चूनामयी मिट्टियों (रांकड़ तथा मार) में अनुकूल होता है। किन्तु चिकनी मृत्तिका प्रकृति वाली (पड़ुवा, काबर) मिट्टियों में प्रभाव प्रतिकूल होता है; पड़ुवा तथा काबर मिट्टियों में मैंगनीज की अपेक्षा लौह की अधिक वृद्धि होती है जब कि चूनामयी मिट्टियों में (रांकड़, मार) में लौह की अपेक्षा मैंगनीज की अधिक वृद्धि देखी जाती है। स्पष्ट है कि मृदा में लौह की अधिकता मैंगनीज की उपलब्धता को घटाती है। उसी प्रकार मैंगनीज की अधिकता लौह की उपलब्धता पर विपरीत प्रभाव दिखाती है।

निर्देश

1. अय्यर, एस० पी०, **इंडियन फार्म०**, 1946, **70**, 11.
2. बासक, एम० एन० तथा भट्टाचार्य, आर०, **स्वायल साइं०**, 1962, **94**, 258.
3. क्लार्क, एफ० ई०, नियरपास, डी० सी० तथा स्पेच, ए० डब्ल्यू०, **एग्रोना० जर्न०**, 1957, **49**, 586.
4. मन्डल, एल० एन०, **स्वायल साइं०**, 1961, **91**, 121-126, **स्वायल साइं०**, 1964, **97**, 127.
5. सावन्त, एन० के० तथा एलिस, आर० नू, **स्वायल साइं०**, 1964, **98**, 388.
6. मेहता, बी०वी० तथा पटेल, एन० के०, **जर्न० इन्डि० सोसा० स्वायल साइं०**, 1967, **15**, 41-47.
7. लिंडसे, डब्ल्यू० एल० तथा थार्न, डी० डब्ल्यू०, **स्वायल साइं०**, 1954, 77, 271-279.
8. रयान, पी०, ली, जे० तथा पीबल्स, टी० एफ०, **वर्ल्ड स्वायल रिसोर्सेज, रिपोर्ट** 1967, **21**. एफ० ए० ओ० रोम, इटली
9. मिश्रा, एस० जी० तथा मिश्रा, पी० सी०, **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका**, 1967, **10**, 147-159.
10. रंधावा, एन० एस०, कँवर, जे० एस० तथा निझवन, एस० डी०, **स्वायल साइं०**, 1961, **92**, 206.
11. मित्तल, ओ० पी० तथा राय, एस० डी०, **जर्न० इंडियन सोसा० स्वायल साइं०**, 1963, **11**(1), 17-22.
12. दुबे, आर० आर०, श्रीवास्तव, ए० आर० तथा सिन्हा, एच०, **जर्न० इंडियन सोसा० स्वायल साइं०** 1970, **18**(2), 171-174.
13. ग्रेसमेनिस, वी० ओ० तथा लीपर, जी० डब्ल्यू०, **प्लान्ट स्वायल**, 1966, **25**, 41-48.

14. नेजेक, बी० डी० डी० तथा ग्रीनर्ट, एच०, **एग्रोना० जर्न०**, 1971, **63**, 617-619.

15. हॉल्मेस, आर० एस० तथा ब्राउन, जे० सी०, **स्वायल साइं०**, 1955, **80**, 167-168.

16. पोटर्र, एल० के० तथा थार्न, डी० डब्ल्यू०, **स्वायल साइं०**, 1955, **79**, 373-382.

17. क्रिस्टेंसन, पी० डी०, टोथ, एस० जे० तथा बियर, एफ० ई०, **स्वायल साइं० सोसा० अमे० प्रोसी०**, 1950, **15**, 279-282.

18. हीम, जे० डी०, **यू० एस० ज्योल० सर्वे वाटर सप्लाई पेपर**, 1963, 1667 ए 64 बी

19. पैट्रिक, डब्ल्यू० एच०, **ट्रान्स० एथ इन्स्ट० कान्ग्र० स्वायल साइं०**, 1964.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 2, April, 1975, Pages 165-168

उत्तर प्रदेश की क्षारीय मृदाओं में कुल सीसा

शिव गोपाल मिश्र तथा गिरीश पाण्डेय
कृषि रसायन अनुभाग, रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जनवरी 7, 1975]

सारांश

उत्तर प्रदेश के 14 जिलों के औद्योगिक क्षेत्रों एवं सड़कों के पार्श्व की क्षारीय मिट्टियों के 65 सतही नमूने लिए गये जिनमें कुल सीसा की मात्रा ज्ञात की गयी। इन मिट्टियों में कुल सीसा 4·0—90·0 अंश प्रति दशलक्षांश पाया गया। जब मिट्टियों के रासायनिक गुणधर्मों तथा कुल सीसा के मध्य सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना की गयी तो केवल कुल सीसा और कार्बनिक कार्बन के बीच धनात्मक सार्थक सहसम्बन्ध ($r = +0{\cdot}216$) पाया गया।

Abstract

Total lead in saline and alkali soils of Uttar Pradesh. B*y* S. G. Misra and G. Pandey, Agricultural Chemistry Section, Chemistry Department, Allahabad University, Allahabad.

65 surface samples from saline-alkali tracts of fourteen districts of Uttar Pradesh were collected and analysed for their total lead. These samples were taken from the roadside covering industrial and cultivated areas of U. P. These soils contained 4 – 90 ppm total lead. A positive significant correlation ($r + 0{\cdot}216$) was observed only between organic carbon content and total lead of soils.

मिट्टी में सीसा मुख्यत: लेड सल्फाइड, लेड कार्बोनेट तथा लेड सल्फेट अयस्कों के रूप में पाया जाता है। यद्यपि मृदा में सीसे की उपस्थिति लेशमात्र होती है लेकिन सड़कों के पार्श्व में जिधर से वाहन गुजरते हैं, सीसा की खानों के आस-पास, उन मिट्टियों में जहां कृषीय रसायन-जैसी कीटनाशक दवाइयाँ (लेड आर्सेनेट), रासायनिक उर्वरक (लाइमस्टोन तथा सुपरफास्फेट) इत्यादि डाले जाते हैं वहां अधिक सीसा पाये जाने की सम्भावना रहती है। साधारणतया संसार की मिट्टियों में 5—50 अंश प्रति दशलक्षांश सीसा की कुल मात्रा पाई गयी है। लेकिन सीसा की खानों के पास एवं सीसा

सारणी-1

उत्तर प्रदेश की क्षारीय मिट्टियों में कुल सीसा की मात्रा

क्र० स०	जिले जहां से नमूने लिए गये	नमूनों की संख्या	पी-एच परास	चूना परास%	कार्बनिक कार्बन परास %	कुल सीसा परास अंश दशलक्षांश
1	लखनऊ	8	8·1—9·6(8·3)	3·7—9·4(6·5)	0·288—1·872(1·622)	16·60—90·00(37·84)
2	रायबरेली	6	8·0—8·7(8·3)	5·5—9·7(7·6)	0·725—20·28(1·257)	4·00 —70·00(37·38)
3	प्रतापगढ़	5	8·1—8·5(8·2)	4·1—9·6(7·9)	0·612—2·080(1·50)	23·33—63·32(35·04)
4	मिर्जापुर	1	8·0	4·0	3·172	34·0
5	बलिया	4	7·9—9·7(8·6)	4 6—11·3(7·9)	0·182—1·820(1·001)	25·32—50·0(33·0)
6	आजमगढ़	3	8·0—8·1(8·0)	1·3—5·3(7·0)	0·564—3·276(1·696)	29·10 —32·00(29·10)
7	कानपुर	8	7·6—8·5(8·1)	2·1—11·7(6·3)	0·572—1·092(0·883)	16·64—50·0(28·28)
8	वाराणसी	4	7·4—8·4(7·9)	1·1—4·0(2·2)	02·60—5·746(1·976)	20·00—42·64(28·16)
9	सुल्तानपुर	6	8·0—9·3(8·5)	1·1—7·1(3·1)	0·312—1·222(0·712)	6·64 —40·0(27·20)
10	उन्नाव	6	7·6—9·6(9·0)	1·3—9·0(5·8)	0·286—1·040(0·607)	8·33 —43·33(24·15)
11	जौनपुर	1	8·3	2·3	0·276	24·0
12	फतेहपुर	5	8·1—8·7(8·4)	2·5—9·4(5·2)	0·783—1·612(1·206)	18·64—32·32(23·86)
13	गाजीपुर	4	8·1—9·4(8·6)	4·6—11·3(7·9)	0·182—1·820(1·001)	6·64 —36·64(22·48)
14	इलाहाबाद	4	7·4 - 9·4(8·6)	1·3—11·3(7·0)	0·884—3·562(2·190)	4·00—23·32(9·81)

कोष्टकों में मध्यमान दिये हैं।

प्रदूषित मिट्टियों में इसकी मात्रा 45,000 अंश प्रति दशलक्षांश भी हो सकती है (स्वेन[1])। ऐसी मिट्टियाँ, जो सड़कों के आसपास हैं तथा अम्लीय हैं, उनमें सीसे की विलेयता अधिक होने के कारण उनमें उगे पौधों में सीसे की अधिकता रहती है जिसका विषाक्त प्रभाव पशु एवं मानव जीवन पर पड़ता है (बैरन तथा डेलावाउल्ट[2] तथा विल्सन[3])।

अभी तक भारतवर्ष की क्षारीय मृदाओं में कुल सीसे की मात्रा ज्ञात नहीं है। अतः प्रस्तुत अध्ययन अन्य लेशतत्वों के निश्चयन के साथ कुल सीसे की मात्रा ज्ञात करने के संदर्भ में किया गया।

प्रयोगात्मक

कुल सीसे की मात्रा ज्ञात करने के लिए उत्तर प्रदेश के 14 जिलों से क्षारीय मिट्टियों से 65 नमूने लिए गये। इस बात का ध्यान रखा गया कि जहां पेट्रोल टंकिया बनी हैं, वहां उनके आस-पास के नमूने लिये जायँ। इन सतही नमूनों को सुखाकर पीस लिया गया। इनका विश्लेषण पी-एच, चूना, कार्बनिक कार्बन तथा कुल सीसा के लिए किया गया।

मिट्टियों में कुल सीसा के निश्चयन के लिए 1 ग्राम मिट्टी को 20 मिली० नाइट्रिक अम्ल तथा 10 मिली० परक्लोरिक अम्ल के साथ 250 मिली० बीकर में तब तक पाचित किया गया जब तक परक्लोरिक अम्ल के धूम अदृश्य नहीं हो गये और आयतन घटकर दो-तीन मिली० नहीं रह गया। बीकर की दीवालों को 25 मिली० गरम आसुत जल से धोकर ठंडा कर लिया गया। ठंडा हो जाने के बाद ह्वाटमैन नं० 41 निस्यन्द पत्र से उपर्युक्त पाचित मिट्टी को 250 मिली० के फ्लास्क में छान लिया। अवशेष को 0·5 नार्मल हाइड्रोक्लोरिक अम्ल से धोया और फ्लास्क का आयतन पूरा कर लिया। 50 मिली० छनित लेकर उसमें कुल सीसा की मात्रा डिथिजोन विधि (सैन्डल[4]) द्वारा ज्ञात कर ली गयी।

परिणाम तथा विवेचना

उत्तर प्रदेश के 14 जिलों की 65 मिट्टियों के कुछ रासायनिक गुणधर्म सारणी-1 में दिए गए हैं। उनसे यह स्पष्ट हो जाता है कि सभी मिट्टियां क्षारीय या अल्पक्षारीय हैं। मिट्टी में चूना तथा कार्बनिक कार्बन की मात्रा अधिक है। जो नमूने पेट्रोल टंकी के आसपास से लिए गए हैं वे देखने में काले और उच्च कार्बन युक्त हैं।

इलाहाबाद की मिट्टियों में कुल सीसा की औसत मात्रा सबसे कम (9·81 अंश) और लखनऊ जिले में सब से अधिक (37·84 अंश) पायी गयी। उत्तर प्रदेश के 14 जिलों में कुल सीसा की औसत मात्रा निम्न क्रम में पायी गयी:—

लखनऊ (37·84 अंश) > रायबरेली (37·38 अंश) > प्रतापगढ़ (35·04 अंश) > मिर्जापुर (34·0 अंश) > बलिया (33·0 अंश) > आजमगढ़ (29·10 अंश) > कानपुर (28·28 अंश) > वाराणसी (28·16 अंश) > सुल्तानपुर (27·20 अंश) > उन्नाव (24·15 अंश) > जौनपुर (24·00 अंश) फतेहपुर (23·86 अंश) > गाजीपुर 22·48 अंश) > इलाहाबाद (9·8 अंश)।

उपर्युक्त मिट्टियों में कुल सीसा की मात्रा 4 से 90 अंश प्रति दशलक्षांश तक पायी गयी। स्वेन[1] ने भी संसार की कृष्य मिट्टियों के लिए इसी प्रकार के मान सूचित किए हैं। सारणी-2 से स्पष्ट कि मृदा के रासायनिक गुणधर्म तथा कुल सीसा के मध्य सांख्यिकीय गणना करने पर कुल सीसा और कार्बनिक कार्बन के मध्य सार्थक सहसम्बन्ध पाया गया ($r = +0{\cdot}216$)। अनुमानतः ऐसा केवल मृदा के कार्बनिक पदार्थों से जैविक विधियों द्वारा निर्मित कार्बनिक अम्ल तथा सीसा के साथ स्थायी संकुल बनने के ही कारण होता है [बान्डरेन्को[5], प्रेट[6] तथा मिश्र एवं पाण्डेय[8]]। ये स्थायी संकुल सीसा को मृदा में एक स्थान से दूसरे स्थान तक स्थानान्तरित होने से रोकते हैं।

सारणी-2

r-मान

क्र० स०	कुल सीसा तथा रासायनिक गुणधर्म के बीच सम्बन्ध	r-मान
1	कुल सीसा तथा पी-एच	−0·065
2	कुल सीसा पथा कार्बनिक कार्बन	+0·216*
3	कुल सीसा तथा चूना	+0·125

*5 प्रतिशत पर सार्थक

यह रोचक तथ्य है कि कुल सीसा और पी-एच या चूना के बीच कोई भी सार्थक सम्बन्ध नहीं पाया गया यद्यपि हम एक पूर्ववर्ती शोध पत्र में यह दिखा चुके हैं कि मिट्टियों में पी-एच, कार्बनिक कार्बन तथा चूना सम्मिलित रूप से सीसे की उपलब्धि पर प्रभाव डालते हैं [मिश्र तथा पाण्डेय[8]]।

निर्देश

1. स्वेन, डी० जे०, **टेक्नीकल कम्यूनीकेशन नं० 48.** 1955 **कामन वेल्थ ब्यूरो सायॅल साइंस**
2. बेरन, एच० बी० तथा डेलावाउल्ट, आर० ई०, **जर्न० सायल फुड० एग्री०,** 1962, **13,** 96-98
3. विल्सन, ए० एल०, **स्काट० एग्री०,** 1962, **42,** 87
4. सैंडल, ई० वी०, **कलरीमेट्रिक डेटरमिनेशन आफ ट्रेसेज आफ मेटल्स** 1950 **इंटर साइन्स पब्लिशर्स, न्यूयार्क**
5. बान्डरेन्को, जी० पी०, **जियोरिवमिया** 1965, **5,** 631-636
6. प्रेट, पी० एफ० तथा अन्य, 8वीं **इण्टर नेशनल कांग्रेस सायल साइन्स, बुखारेट ट्रांस,** 1964, **3,** 343
7. मिश्र, एस० जी० तथा पाण्डेय, जी०, **प्लांट सॉयल,** 1975 (**प्रेषित**)
8. मिश्र, एस० जी० तथा पाण्डेय, जी०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका,** 1972, **16(4),** 231-234

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 2, April, 1975, Pages 169-172

α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के टाइटेनियम (III) संकुलों का ऊष्मागतिक अध्ययन

पी० बी० चक्रवर्ती तथा एच० एन० शर्मा*
रसायन विभाग, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—मार्च 6, 1975]

सारांश

टाइटेनियम (III) की ग्लाइकॉलिक, लैक्टिक तथा मैंडेलिक अम्लों के साथ संकुलीकरण अभिक्रियाओं के ऊष्मागतिक-स्थिरांकों, $\triangle F$, $\triangle H$ तथा $\triangle S$ का अध्ययन 30°C पर 0·1M सोडियम परक्लोरेट के माध्यम में किया गया। इन α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के साथ टाइटेनियम (III) संकुलों के स्थायित्व का क्रम ग्लाइकोलेट>लैक्टेट>मैंडलेट पाया गया। यह क्रम लिगैंडों के क्षारक-सामर्थ्य के क्रम से भिन्न है। इसका कारण संभवत: त्रिविम विन्यासी प्रभाव (steric effect) है। इसकी पुष्टि एंट्रापी के मानों से होती है, जबकि ऋणात्मक एन्थाल्पी के मान ग्लाइकोलेट, लैक्टेट तथा मैंडेलेट सभी प्रकरणों में समान ($\approx$3·68 Kcals/mole) पाये गये हैं।

Abstract

Thermodynamic study of Ti(III) complexes with α-hydroxy acids. *By* P. B. Chakrawarti, Chemical Laboratories, M. V. M. Bhopal and H. N. Sharma, Madhav Vigyan Mahavidyaaya, Ujjain.

Thermodynamic parameters, $\triangle F$, $\triangle H$ and $\triangle S$ have been calculated for complex forming reactions of Ti(III) with glycolic, lactic and mandelic acids at 30°C in 0·1M ($NaClO_4$) medium. The stability order for Ti(III) complexes with these α-hydroxy acids was found glycolate>lactate>mandelate. This does not follow the order of the basic strength of the ligands, probably due to the steric effect. This has a support in the values of positive entropy, since the calculated values of negative enthalpy for glycolate, lactate and mandelate are the same in all the cases ($\approx$3·68 Kcals/mole).

* प्राचार्य, माधव विज्ञान महाविद्यालय, उज्जैन

हमने अपने पिछले शोध-पत्रों में टाइटेनियम (III) के ग्लाइकोलिक, लैक्टिक और मैंडलिक अम्लों के साथ कीलेटों के निर्माण और स्थायित्व-स्थिरांकों का अध्ययन प्रस्तुत किया था[1-3] । प्रस्तुत शोध-पत्र में टाइटेनियम (III) के इन α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के साथ संकुलीकरण की अभिक्रियाओं का ऊष्मागतिक अध्ययन प्रस्तुत किया जा रहा है ।

प्रयोगात्मक

प्रयोग में लाये गये सभी रासायनिक द्रव्य उच्च कोटि की शुद्धता वाले थे । सभी विलयन कार्बन डाइआक्साइड से मुक्त आसुत जल में बनाये गये तथा उनका मानकीकरण उपयुक्त मानक विधियों द्वारा किया गया ।

पी-एच मापन के लिए सिस्ट्रॉनिक्स का टाइप-322 पी-एच मापी उपयोग में लाया गया । सारे पी-एच अनुमापन एक विशेष प्रकार की 100 मिली० आयतन की सेल में किये गये, जिसे स्थिर ताप पर रखने के लिये, बाहरी जेकेट में, स्थिर ताप वाले जल स्थिरतापी (थर्मोस्टेट) से लगातार परिसंचरित किया गया । प्रत्येक समय, पाठ्यांक लेने के पहले अभिक्रया-मिश्रण चुम्बकीय-विधि से हिलाया गया ।

परिणाम एवं विवेचना

वान्टहॉफ आइसोथर्म, आइसोबार समीकरण का ग्राफीय हल तथा गिब्ज-हेल्मोल्त्ज समीकरण का उपयोग क्रमशः प्राप्यतम ऊर्जा, एन्थाल्पी तथा एन्ट्रॉपी परिवर्तनों के लिये किया । ये सभी परिकलन 30°C पर किये गये । $\triangle F$ तथा $\triangle H$ के परिकलनों के लिये आवश्यक विभिन्न पदों के और सम्पूर्ण-अभिक्रिया के स्थायित्व-स्थिरांकों के मान कैल्विन-[5], ज़ेरम विधि[1] द्वारा 30°, 40° तथा 50°C तापों पर 0·1M सोडियम परक्लोरेट के माध्यम में प्राप्त किये गये और सारणी-1 में दिये गये हैं ।

सारणी-1

α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के साथ Ti(III) के संकुलों के स्थायित्व स्थिरांक
μ=0·1M ($NaClO_4$)

	Ti(III)—ग्लाइकोलेट				Ti(III)—लैक्टेट				Ti(III)—मैंडलेट			
	$\log k_1$	$\log k_2$	$\log k_3$	$\log \beta_3$	$\log k_1$	$\log k_2$	$\log k_3$	$\log \beta_3$	$\log k_1$	$\log k_2$	$\log k_3$	$\log \beta_3$
30°C	3·85	3·72	3·65	11·22	3·57	3·45	3·24	10 26	3·25	3·07	2·90	9·22
43°C	3·69	3·63	3·56	10·88	3·51	3·42	3·20	10·13	3·15	2·96	2·84	9·95
50°C	3·62	3·57	3·46	10·65	3·41	3·34	3·16	9·91	3·08	2·92	2·75	8·75

नोट—30°C पर स्थायित्व-स्थिरांकों के मान हमारे पूर्व शोध-पत्रों [1-3] में दिये जा चुके हैं ।

प्रथम पद तथा सम्पूर्ण प्राप्यतम ऊर्जा निकालने के लिये वान्टहॉफ आइसोथर्म से प्राप्त क्रमशः (1) तथा (2) समीकरणों का उपयोग किया गया। इनके मान सारणी-2 में दिये गये हैं:

$$\triangle F_1 = -RT \log k_1 \tag{1}$$

$$\triangle F_3 = -RT \log \beta_3 \tag{2}$$

जहाँ $\triangle F_1$ तथा $\triangle F_3$ क्रमशः प्रथम पद तथा सम्पूर्ण प्राप्यतम ऊर्जा परिवर्तन और k_1 तथा β_3 क्रमशः प्रथम पद तथा सम्पूर्ण स्थायित्व स्थिरांक हैं। T परमताप प्रदर्शित करता है।

प्रथम-पद तथा सम्पूर्ण एन्थाल्पी परिवर्तनों के लिये आइसोबार समीकरण (3) तथा (4) का उपयोग किया गया। इनके मान सारणी-2 में दिये गये हैं:

$$\frac{\delta \log k_1}{\delta(1/T)} = \frac{\triangle H_1}{4{\cdot}57} \tag{3}$$

$$\frac{\delta \log \beta_3}{\delta(1/T)} = \frac{\triangle H_3}{4.57} \tag{4}$$

जहाँ, $\triangle H_1$ तथा $\triangle H_3$ क्रमशः प्रथम-पद सम्पूर्ण एन्थॉल्पी परिवर्तन हैं।

एन्ट्रॉपी परिवर्तनों के मान के लिये (सारणी-2) गिब्ज़-हेल्मोल्ट्ज़ समीकरण से व्युत्पन्न (5) तथा (6) समीकरणों का उपयोग किया गया:

$$\triangle S_1 = \frac{\triangle H_1 - \triangle F_1}{T} \tag{5}$$

$$\triangle S_3 = \frac{\triangle H_3 - \triangle F_3}{T} \tag{6}$$

सारणी-2

α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के साथ Ti(III) के संकुलों के ऊष्मागतिक स्थिरांक
30°C; μ=0·1 M($NaClO_4$)

संकुल	प्राप्यतम ऊर्जा परिवर्तन Kcals/mole		एन्थाल्पी परिवर्तन Kcals/mole		एन्ट्रॉपी परिवर्तन Cals/degree/Mole	
	$\triangle F_1$	$\triangle F_3$	$\triangle H_1$	$\triangle H_3$	$\triangle S_1$	$\triangle S_3$
Ti(III)—ग्लाइकोलेट	−8·27	−15·50	−3·68	−9·46	5·15	19·95
Ti(III)—लैक्टेट	−4·96	−14·26	−3·68	−9·34	4·24	16·27
Ti(III)—मैंडलेट	−4·30	−2·79	−3·68	−9·46	2·05	13·96

सारणी-1 को देखने से विदित होता है कि अध्ययन किये गये कीलेटों के स्थायित्व का क्रम ग्लाइकोलेट>लैक्टेट>मैंडलेट है। यह क्रम लिगैंडों की क्षारक-सामर्थ्य के क्रम से भिन्न है क्योंकि क्षारक-सामर्थ्य के अनुरूप क्रम लैक्टेट>ग्लाइकोलेट>मैंडलेट होना चाहिए था क्रम। में यह भिन्नता एन्ट्रॉपी के कारण प्रतीत होती है, क्योंकि सभी प्रकरणों में एन्थाल्पी मान समान पाये गये हैं (सारणी-2) और इसका कारण संभवतः त्रिविम विन्यासी प्रभाव (स्टेरिक इफेक्ट) है। ग्लाइकोलिक, लैक्टिक और मैंडेलिक अम्लों में क्रमशः भारी होते हुए $-H$, $-CH_3$ तथा $-C_6H_5$ समूह इनके संकुलों के स्थायित्व को इसी क्रम में प्रभावित करते हैं क्योंकि, संकुल की सममिति में परिवर्तन $\triangle S$ के मानों में परिवर्तन प्रदर्शित करता है (भले ही $\triangle H$ के मानमें कोई परिवर्तन न हो) और क्योंकि $\triangle F = \triangle H - T \triangle S$, प्राप्यतम ऊर्जा में भी परिवर्तन होगा[6]।

निर्देश

1. चक्रवर्त्ती, पी० बी० तथा शर्मा, एच० एन०, **साइंस एण्ड कल्चर,** 1973, 39(8), 344
2. चक्रवर्त्ती, पी० बी०, तथा शर्मा, एच० एन०, **वही,** 1974, **40**(3), 114
3. चक्रवर्त्ती, पी० बी० तथा शर्मा, एच० एन०, **वही,** 1974, **40**(9), 407
4. जेरम, जे०, **'मेटल ऐमीन फॉर्मेशन इन ऐक्वस सोलूशन' पी० हास एण्ड संस, कोपनहेगन,** 1941
5. केल्विन तथा विलसन, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०,** *1945, 67,* 2003
6. डगलस, बी० ई० तथा मैक्डेनियल, डी० एच०, **कंसेप्ट्स एंड मॉडल्स ऑफ इनऑर्गनिक केमिस्ट्री, ऑक्सफोर्ड,** *1965*

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 2, April, 1975, Pages, 173-177

जिंक का प्राप्यता पर सूक्ष्ममात्रिक तत्वों का प्रभाव

शिवगोपाल मिश्र एवं गिरीश पाण्डेय
कृषि रसायन अनुभाग, रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जनवरी 1, 1975]

सारांश

जब जलोढ़ मृदा में जिंक के साथ ताम्र या लोह की विभिन्न मात्रायें डाल कर इनकुबेशन किया जाता है तो प्रथम 15 दिनों में जिंक का लगभग 48-83 प्रतिशत, लोह का 94-100 प्रतिशत तथा ताम्र का 75-81 प्रतिशत अभिग्रहीत हो जाता है। 30 दिन पर जिंक और लोह की मात्रा में वृद्धि किन्तु ताम्र और फास्फेट की मात्रा में कमी देखी जाती है। जब इनकुबेशन काल को बढ़ा कर 60 दिन कर दिया जाता है तो सभी तत्वों की उपलब्धि में एकाएक ह्रास आ जाता है। ऐसा अनुमान है कि सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की अन्योन्य क्रियायें ही इसके लिए उतरदायी हैं।

Abstract

Effect of trace elements on the availability of zinc. *By* S. G. Misra and G. Pandey, Agricultural Chemistry Section, Chemistry Department, Allahabad University, Allahabad.

When Zinc is added alongwith Cu or Fe to an alluvial soil, about 48 – 83% of Zn is retained during the first 15 days of incubation and as the period of incubation is increased to 30 days an increase in the availability of Zn and Fe and a decrease in the availability of Cu and P is recorded. On further increasing the incubation period to 60 days, a decrease in the availability of Zn, P, Cu and Fe is observed. It is suggested that micronutrient interactions are responsible for such a behaviour in soils.

जब मृदा में स्थूल तत्वों के साथ सूक्ष्ममात्रिक तत्व मिलाए जाते हैं तो अन्योन्य क्रिया देखी जाती है। मृदा में विभिन्न सूक्ष्ममात्रिक तत्वों के मध्य की अन्योन्य क्रियाओं का उपयोग सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की विषालुता को दूर करने लिए किया जाता है। मार्टेन[1] ने मैंगनीज स्वांगीकरण में सोडियम या पोटैशियम के प्रतिद्वन्दी प्रभाव को देखा। फाक्स[2] ने क्षारीय मिट्टियों में बोरान की विषालुता को

कैल्सियम और पोटैशियम की मात्राएं डालकर दूर करने का सुझाव दिया। पास्चरीचा एवं रन्धावा[3] ने मालिब्डनम की विषालुता सल्फर डाल कर दूर की। इसी प्रकार सेलीनियम की विषालुता सल्फेट डालने से दूर की जा सकती है।

प्राप्त परिणामों से यह स्पष्ट है कि अनेक सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की तरह जिंक की भी सूक्ष्म मात्रा पौधों के पोषण के लिये अत्यन्त आवश्यक है (सीट्ज एवं जूरीनाक[4]) मिट्टी में सूक्ष्ममात्रिक तत्वों के बीच अथवा स्थूल तत्वों एवं सूक्ष्ममात्रिक तत्वों के बीच अन्योन्य क्रियाओं पर बहुत ही कम शोध हुआ है। प्रस्तुत अध्ययन में जिंक के साथ लोह तथा ताम्र की अन्योन्य क्रियाओं के फलस्वरूप जिंक, ताम्र, लोह, फास्फोरस की प्राप्यता पर प्रभाव देखा गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिए एक जलोढ़ मिट्टी चुनी गयी जो मनौरी (इलाहाबाद) से एकत्र की गई। मिट्टी को प्रयोगशाला में सुखाने के पश्चात् उसे पीस कर 100 छिद्र वाली मानक चलनी से चालकर संग्रहीत कर लिया गया। इसके कुछ भौतिक तथा रासायनिक गुणों के आंकड़े सारणी-1 में दिए गए हैं।

सारणी-1

मिट्टी के कुछ भौतिक तथा रासायनिक गुण

	गुण	मान
1.	पी-एच	7·5
2.	चूना (%)	0·50
3.	कार्बनिक कार्बन (%)	0·835
4.	उपलब्ध फास्फेट (अंश प्रति दशलक्षांश)	29·0
5.	विनिमेय लोह (,,)	4·80
6.	विनिमेय ताम्र (,,)	0·75
7.	उपलब्ध जिंक (,,)	0·66
8.	बालू (%)	65·52
9.	सिल्ट (%)	12·65
10.	मृत्तिका (%)	21·83

100 ग्राम मिट्टी को पाइरेक्स बीकरों में लेकर विभिन्न सूक्ष्ममात्रिक तत्वों से उपचारित किया गया । लोह (फेरस सल्फेट के रूप में) की दो मात्राएं 10·0 तथा 25·0, ताम्र (कापर सल्फेट के रूप में) की दो मात्राएं 10·0 तथा 25·0 एवं जिंक (जिंक सल्फेट के रूप में) की दो मात्राएं 5·0 तथा 10·0 अंश प्रति दश लक्षांश डाली गयीं । ये सभी लवण एनालार (बी० डी० एच०) कोटि के थे तथा विलयन के रूप में डाले गये । उपचारों का विस्तृत विवरण सारणी-2 में दिया गया है । उपचारित बीकरों को धूप में रक्खा गया तथा समय समय पर आसवित जल डालकर उन्हें नम किया जाता रहा । यह क्रिया 60 दिनों तक चालू रक्खी गयी । तत्वों का निश्चयन तीन अवधियों 15, 30 और 60 दिनों पर किया गया । प्रत्येक अवधि के बाद मिट्टी को सुखाया गया तथा पीस कर नमूने लिए गये और बची हुई मिट्टी को पुनः इनकुबेट कर दिया गया ।

मिट्टियों का विनिमेय लोह NH_4OAc (पी-एच 4·8) विधि द्वारा तथा ताम्र NH_4OAc (पी-एच 7·0) निष्कर्षण विधि द्वारा [चेंग और ब्रे[5] तथा ओल्सन[6] विधि], जिंक को डिथिजोन विधि [सैंडल[7]] तथा फास्फोरस को ट्राग विधि [जैक्सन[8]] द्वारा ज्ञात किया गया । अन्य रासायनिक गुणों का मानक विधियों द्वारा निश्चयन किया गया ।

परिणाम और विवेचना

सारणी-2 में विभिन्न समयों पर प्राप्य जिंक एवं फास्फेट तथा विनिमेय लोह और ताम्र की मात्राएँ दी गयी हैं । इससे स्पष्ट है कि जब मृदा में अकेले जिंक डाला गया तो फास्फेट, लोह एवं ताम्र की मात्राओं में ह्रास हुआ । गिलवे एवं अन्य[9] को भी मिट्टी में जिंक डालने से इसी प्रकार का प्रभाव प्राप्त हुआ । ऐसा अनुमानतः जिंक-फास्फेट का अविलेय अवक्षेप बनने के कारण ही होता है (कल्यान-सुन्दरम् तथा मेहता[10])

जब जिंक के साथ लोह का विभिन्न मात्राएं डाली गयीं तो जिंक, फास्फेट और ताम्र की मात्राएं घटीं परन्तु लोह की मात्रा बढ़ी । इसी प्रकार जिंक के साथ ताम्र डालने पर जिंक, लोह तथा फास्फेट की मात्राओं में ह्रास हुआ परन्तु ताम्र की मात्रा बढ़ी । इससे स्पष्ट है कि लोह एवं ताम्र की उपलब्धि पर जिंक का काफी प्रभाव पड़ता है । ऐसा तत्वों के बीच पारस्परिक अन्योन्य क्रियाओं के ही कारण होता हैं ।

प्रस्तुत अध्ययन से स्पष्ट है कि 15 दिनों में ही जिंक का 48-83 प्रतिशत, लोह का 94-100 प्रतिशत और ताम्र का 75-81 प्रतिशत अभिग्रहीत हो जाता है । किन्तु जब इनकुबेशन का समय 30 दिनों तक बढ़ाया जाता है तो उपलब्ध जिंक और लोह की मात्राओं में वृद्धि देखी जाती है जब कि उसी काल में ताम्र और फास्फेट की मात्रा में ह्रास होता है । पुनः जब इनकुबेशन का समय बढ़ाकर 60 दिन किया जाता है तो सभी तत्वों की मात्राओं का क्रमिक ह्रास होता है । अनुमानतः तत्वों के अविलेय यौगिकों के बनने के कारण ऐसा होता होगा ।

सारणी-2

मिट्टी में मिलाये गये Fe, Cu एवं Zn का Zn तथा अन्य तत्वों (Fe, Cu और P) की उपलब्धि पर प्रभाव

क्र० स०	उपचार	15 दिनों बाद				30 दिनों बाद				60 दिनों बाद			
		Zn	P	Fe	Cu	Zn	P	Fe	Cu	Zn	P	Fe	Cu
1	नियन्त्रण	0·66	29·0	4·8	0·75	1·20	29·[illegible]	4·6	0·72	0·66	28·7	4·6	0·70
2	मृदा+Zn(I)**	2·20	24·6	4·1	0·72	3·00	24·0	4·4	0·68	2·00	23·0	4·0	0·62
3	मृदा+Zn(2)	5·80	20·2	3·9	0·60	6·00	20·0	4·0	0·58	5·00	19·4	3·8	0·50
4	मृदा+Zn(I)+Fe(I)**	1·80	18·4	5·4	0·52	2·00	18·2	5·6	0·46	1·70	18·0	5·2	0·40
5	मृदा+Zn(I)+Fe(2)	1·54	16·7	5·7	0·45	1·75	16·4	5·8	0·42	1·50	16·0	5·3	0·38
6	मृदा+Zn(2)+Fe(I)	4·26	14·4	4·8	0·39	4·30	14·0	5·0	0·34	4·20	13·4	4·3	0·30
7	मृदा+Zn(2)+Fe(2)	3·80	13·7	5·2	0·25	4·00	13·4	5·4	0·20	3·56	13·0	4·8	0·15
8	मृदा+Zn(I)+Cu(I)**	2·06	22·4	4·5	3·37	2·20	22·2	4·6	3·20	1·80	21·6	4·2	3·00
9	मृदा+Zn(I)+Cu(2)	1·86	21·6	4·2	6·62	2·00	21·2	4·4	6·00	1·72	20·8	4·0	5·80
10	मृदा+Zn(2)+Cu(I)	4·53	20·6	4·0	3·30	4·40	20·3	4·2	3·15	4·12	19·5	3·8	2·95
11	मृदा+Zn(2)+Cu(2)	4·00	14·8	3·8	5·50	4·20	14·5	4·0	5·30	3·88	14·0	3·6	5·00

** Zn (I) = 5·0 एवं Zn (2) = 10·0 अंश दश लक्षांश

** Fe (I) = 10·0 एवं Fe (2) = 25·0 अंश दश लक्षांश

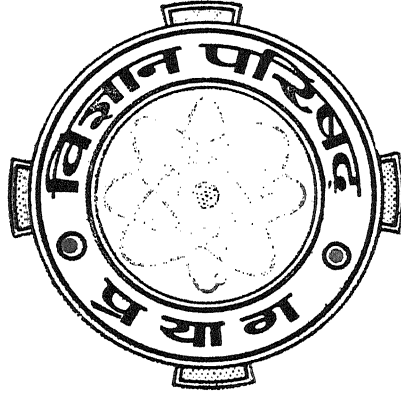
** Cu (I) = 10·0 एवं Cu (2) = 25·0 अंश दश लक्षांश

निर्देश

1. मार्टेन, डी० सी० तथा अन्य, **सायल साइंस**, 1953, **76**, 285-295.
2. फाक्स, आर० एच०, **सायल साइंस**, 1968, **106**, 435-439
3. पास्चरीचा, एन० एस० तथा रन्धावा एन० एस०, **प्रोसी० इण्टरनेशनल सिम्पो० सायल फर्टिलिटी इवैलुएशन**, 1971, **नई दिल्ली**
4. सीट्ज, एल० एफ० तथा जूरीनाक, **जे० जे०**, **जिंक एण्ड सायल फर्टिलिटी**, **इयरबुक**, 1957 **सेपरेट नं०** 2798
5. चेंग, के० एल० तथा ब्रे, आर० एच०, **एनेल० केम०**, 1953, **41**, 655-665
6. ओलसन, आर० बी०, **एग्रोनामी**, 1965, **9**, 963-973
7. शा, ई० तथा डीन, एल० ए०, **सायल साइंस**, 1952, **73**, 341-347
8. जैक्सन, एम० एल०, **सायल केमिकल एनालिसिस**, प्रेन्टिस हाल आफ इण्डिया, नई दिल्ली (1967)
9. गिलवे, डी० जे० तथा अन्य, **जर्न० एग्री० वेस्ट० आस्ट्रे०**, 1970, **11**, **70-72**
10. कल्यानसुन्दरम्, एन० के० तथा मेहता, बी० वी०, **प्लांट सायल**, 1970, **33**, **699-709**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 18 | uly, 1975 | No. 3

The Research Journal of the Hindi Science Academy

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

भाग 18 | जुलाई 1975 | संख्या 3

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 3, July, 1975, Pages 179-185

n-चरों वाले माइजर G-फलन तथा लेगेंड्र फलनों वाले कतिपय सूत्र

ओ० पी० गर्ग
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—मई 30, 1974]

सारांश

n-चरों वाले माइजर G-फलन के प्रसार सूत्र प्राप्त किये गये हैं। रोचक विशिष्ट दशायें भी दी गई हैं।

Some formulae involving Legendre functions and Meijer G-functions of 'n' variables. *By* O. P. Garg, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

Expansion formulae for Meijer G-functon of 'n' variables have been derived. Interesting particular cases have been recorded.

1 भूमिका :

खाडिया तथा गोयल[5] ने माइजर G-फलन को n-चरों तक विस्तीर्ण किया है अर्थात् $G(x_n)$, इस को कतिपय परिवर्तनों के साथ पुन: लिखने पर

$$G(x_n) \equiv G^{m,\,0;\,(M_n),\,(N_n)}_{p,\,q;\,((P_n)(Q_n))}\left[(x_n)\left|\begin{matrix}[(a_p),\,(b_q)]\\ \left\{\left(\left(c^n_{P_n}\right)\right),\left(\left(d^n_{Q_n}\right)\right)\right\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{(L_n)} \phi(\Sigma\, s_k)\, \psi(s_k) \prod_{k=1}^{n}\left\{x_k^{s_k}\,(ds_k)\right\} \tag{1·1}$$

जहाँ

$$\phi(\Sigma\, s_k) = \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(a_j+\sum_{k=1}^{n} s_k\right)}{\prod_{j=1+m}^{p}\Gamma\left(1-a_j-\sum_{k=1}^{n} s_k\right)\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j+\sum_{k=1}^{n} s_k\right)} \tag{1·2}$$

$$(s_k)=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\prod_{j=1}^{Mk}\Gamma\left(c_j^k+s_k\right)\prod_{j=1}^{Nk}\Gamma\left(d_j^k-s_k\right)}{\prod_{j=1+Mk}^{Pk}\Gamma\left(c_j^k-s_k\right)\prod_{j=1+Nk}^{Qk}\Gamma\left(d_j^k+s_k\right)}\right] \tag{1·3}$$

$$\prod_{k=1}^{n}(ds_k)=ds_1\,.\,ds_2\,.\,ds_3\,..\,ds_n \tag{1·4}$$

और भी (a_n) द्वारा अनुक्रम $a_1, a_2, \ldots, a_n$ सूचित होता है,

$\left(\binom{n}{c_{P_n}}\right)$ द्वारा, अनुक्रम $\overset{1}{c_1}, \overset{1}{c_2}, \ldots, \overset{1}{c_{P_1}}; \overset{2}{c_1}, \overset{2}{c_2}, \ldots, \overset{2}{c_{P_2}}; \ldots; \overset{n}{c_1}, \overset{n}{c_2}, \ldots, \overset{n}{c_{P_n}}$; (L_n) n उपयुक्त कंटूर हैं और घन पूर्णांक $p, P_1, P_2, \ldots, P_n, q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, m, M_1, M_2, \ldots, M_n, N_1, N_2, \ldots, N_n$ निम्नांकित असमि- काओं की तुष्टि करते हैं :

$p, q \geqslant 0; Q_k \geqslant 1, 0 \leqslant M_k \leqslant P_k; p+P_k \leqslant q+Q_k; k=1, 2, \ldots n.$ $x_k=0$ $(k=1, 2, \ldots n$ के मान सम्मिलित नहीं हैं) ।

कंटूर L_k s_k-तल में है और अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक फैलता है जिससे कि यदि आव-श्यकता पड़े तो $\Gamma\left(\overset{k}{d_j}-s_k\right)$, $j=1, 2, \ldots, N_k$, के पोल कंटूर L_k के दाईं ओर तथा $\Gamma\left(\overset{k}{c_j}+s_k\right)$, $j=1, 2, \ldots, M_k$ और $\Gamma\left(a_j+\sum_{k=1}^{n} s_k\right)$, $j=1, 2, \ldots, m$ के पोल के बाईं ओर पड़ें जहाँ $k=1, 2, \ldots, n$.

परिभाषित फलन $G(x_n)(x_n)$ का विश्लेषिक फलन है यदि

$$\left.\begin{aligned}&|\arg(x_k)|<(m+M_k+N_k-\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{2}Q_k-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}P_k)\pi\\&\qquad\text{यदि } k=1, 2, \ldots, n\end{aligned}\right\} \tag{A_1}$$

तथा

$$2(m+M_k+N_k)>q+Q_k+p+P_k \text{ यदि } k=1, 2, \ldots, n.$$

इसके बाद सर्वत्र ये प्रतिबन्ध A_1 प्रतिबन्धोंके नाम से अभिहित होंगे ।

2 संकेत तथा ज्ञात फल :

निम्नांकित संकेत तथा ज्ञात फलों का उपयोग उपपत्ति के लिये किया जावेगा

यदि $2Re(\lambda)>|R(\mu)|$

तो $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-1} P_\nu^\mu (x)\, dx$

$$= \frac{\pi 2^\mu \Gamma(\lambda+\frac{1}{2}\mu)\Gamma(\lambda-\frac{1}{2}\mu)}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2}\nu+1)\Gamma(\lambda-\frac{1}{2}\nu)\Gamma(-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu+1)\Gamma(-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2})} \tag{2·1}$$

एर्डेल्यी II, 316 (16).

$$\Gamma(mz)=(2\pi)^{1/2(1-m)}\, m^{mz-1/2} \prod_{r=0}^{m-1} \Gamma(2+r_m)$$

जहाँ m घन पूर्णांक है एर्डेल्यी H.T.F. I(4)

$$\triangle(m, a)\frac{a}{m}, \frac{a+1}{m}, \ldots \frac{a+m-1}{m} \tag{2·3}$$

3· फल :

निम्नांकित समाकलों की उपपत्ति दी गई है :

यदि प्रतिबन्ध (A_1) तथा $2R\left(\lambda+\delta\, \Sigma\, d_j^k\right)>|\, R(\mu)\, |$

जहाँ $j=1, 2, \ldots, N_k; K=1, 2, .. n$

तो $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-1}\; P_\nu^\mu (x)\; G\begin{bmatrix} z_1(1-x^2)^\delta \\ \ldots \\ z_n(1-x^2)^\delta \end{bmatrix} dx$

$$= \frac{2^\mu\, \pi}{\delta\Gamma\left(\frac{2-\mu+\nu}{2}\right)\, \Gamma\left(\frac{1-\mu+\nu}{2}\right)}\; G^{m+2\delta,\, 0;\, (Mn),(Nn)}_{p+2\delta,\, q+2\delta;\, (Pn),\, (Qn)}$$

$$\left[\begin{array}{c|l} z_1 & [\triangle(\delta, \lambda-\frac{1}{2}\mu), \triangle(\delta, \lambda+\frac{1}{2}\mu), (a_p) : \triangle(\delta, \lambda+\frac{1}{2}\nu+1) \\ z_2 & \qquad \triangle(\delta, \lambda-\frac{1}{2}\nu), (b_q)] \\ \ldots & \left\{\left(\left(c^n_{P_n}\right)\right), \left(\left(d^n_{Q_n}\right)\right)\right\} \\ z_n & \end{array}\right] \tag{3·1}$$

यदि प्रतिबन्ध (A_1) तथा $2R\left((\lambda+\delta d_1^k\right)>|\, R(\mu)\, |$

तो $\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-1}\; P_\nu^\mu\; (x)\, G\begin{bmatrix} z_1(1-x^2)^\delta \\ (z_2,\, n) \end{bmatrix} dx$

$$= \frac{\pi\, 2^\mu}{\delta\Gamma\left(\frac{2-\mu+\nu}{2}\right)\, \Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)}\; G^{m,\, 0;\; M_1+2\delta,\; N_1;\; (M_2,\, n),\; (N_2, n)}_{p,\, q;\; P_1+2\delta,\; Q_1+2\delta;\; (P_2,\, n),\; (Q_2,\, n)}$$

$$\left[\begin{array}{c|l} z_1 & [(a_p); (b_q)] \\ z_2 & \left\{\triangle(\delta, \lambda-\tfrac{1}{2}\mu), \triangle(\delta, \lambda+\tfrac{1}{2}\mu), \left(\left(c^{1}_{P_1}\right)\right), \left(\left(d^{1}_{Q_1}\right)\right), \triangle(\delta, \lambda+\tfrac{1}{2}\nu+1), \triangle(\delta, \lambda-\tfrac{1}{2}\nu)\right\} \\ \cdots & \\ z_n & \left\{\left(\left(c^{2,n}_{P_{2},n}\right)\right); \left(\left(d^{2,n}_{Q_{2,n}}\right)\right)\right\} \end{array}\right] \qquad (3{\cdot}2)$$

उपपत्ति

(3·1) को सिद्ध करने के लिये इसके बाईं ओर $G(x_n)$ को (1·1) के द्वारा कंटूर समाकलों के रूप में व्यक्त करते हैं और समाकलनों के क्रम को बदलते हैं जो विहित है जिससे निम्नांकित प्राप्त होता है

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{(Ln)} \phi(\Sigma\, s_k)\, \psi(s_k) \prod_{k=1}^{n} \left\{ z_k^{s_k}\, (d\, s_k) \right\}$$

$$\left[\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda+\delta \sum\limits_{k=1}^{n} s_k - 1}\, P_\nu^\mu\, (x)\, dx\right]$$

अब आन्तरिक समाकल को (2·1) की सहायता से ज्ञात करते हैं, (2·2) का उपयोग करते हैं और (1·1) की सहायता से विवेचित करते हैं तो तुरन्त ही (3·1) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है।

(3·2) को सिद्ध करने के लिये (3·1) के ही अनुसार उपपत्ति ज्ञात की जाती है।

4. प्रसार सूत्र :

निम्नांकित प्रसार सूत्रों को सिद्ध किया गया है।

$$(1-x^2)^{\lambda-1}\; G\left[\begin{array}{c} z_1(1-x^2)^\delta \\ \cdots \\ z_n(1-x^2)^\delta \end{array}\right]$$

$$=\frac{2^{\mu-1}\pi}{\delta} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(r-\mu)!\,(2r+1)\; P_r^\mu}{(r+\mu)!\; \Gamma\left(\frac{2-\mu+r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu+r}{2}\right)}$$

$$G^{m+2\delta,\, 0;\, (Mn),\, (Nn)}_{p+2\delta,\, q+2\delta;\, (Pn),\, (Qn)} \left[\begin{array}{c|l} z_1 & [\triangle(\delta, \lambda-\tfrac{1}{2}\mu), \triangle(\delta, \lambda+\tfrac{1}{2}r), (a_p) \\ z_2 & \triangle(\delta, \lambda+\tfrac{1}{2}r+1), \triangle(\delta, \lambda-\tfrac{1}{2}r)(b_q)] \\ \cdots & \\ z_n & \left\{\left(c^{n}_{Pn}\right), \left(\left(d^{n}_{Qn}\right)\right)\right\} \end{array}\right] \qquad (4{\cdot}1)$$

$$(1-x^2)^{\lambda-1}\ G\begin{bmatrix} z_1(1-x^2)^{\delta} \\ (z_2,\ n) \end{bmatrix}$$

$$=\frac{2^{\mu-1}}{\delta}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(r-\mu)\,!\,(2r+1)\ P_r^{\mu}}{(r+\mu)\,!\ \Gamma\left(\frac{2-\mu+r}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{1-\mu-\nu}{2}\right)}$$

$$G^{m,\ 0;\ M_1+2\delta,\ N_1;\ (M_2,\ n),\ (N_2,\ n)}_{p,\ q;\ P_1+2\delta,\ Q_1+2\delta,\ (P_2,\ n),\ (Q_2,\ n)}$$

$$\left[\begin{array}{l|l} z_1 & [(a_p),\ (b_q)] \\ z_2 & \left\{\triangle(\delta,\ \lambda-\tfrac{1}{2}\mu),\ \triangle(\delta,\ \lambda+\tfrac{1}{2}\mu),\ \left(\begin{smallmatrix}1\\ c_{P_1}\end{smallmatrix}\right);\ \left(d^{1}_{Q_1}\right),\ \triangle(\delta,\ \lambda+\tfrac{1}{2}r+1),\triangle(\delta,\ \lambda-\tfrac{1}{2}r)\right\} \\ \cdots & \\ z_n & \left\{\left(\left(c^{2,\ n}_{P_2,\ n}\right)\right);\ \left(\left(d^{2,\ n}_{Q_2,\ n}\right)\right)\right\} \end{array}\right] \qquad (4\cdot2)$$

उपपत्ति :

(4·1) को सिद्ध करने के लिये हम निम्न प्रकार लिखते हैं

$$f(x)\equiv(1-x^2)^{\lambda-1}\ G\begin{bmatrix} z_1(1-x^2)^{\delta} \\ \vdots \\ z_n(1-x^2)^{\delta} \end{bmatrix}=\sum_{r=0}^{\infty} C_r\ P_r^{\mu} \qquad (4\cdot3)$$

(4·3) में दोनों ओर $P_\nu^{\mu}\ (x)$ से गुणा करते हैं और दोनों ओर -1 से $+1$ के मध्य समाकलित करते हैं, बाईं ओर का मान ज्ञात करने के लिये (3·1) का उपयोग करते हैं तथा

$$\int_{-1}^{1} P_\nu^{\mu}\ (x)\,P_\nu^{\mu}\ (x)\ dx=0 \quad \text{जहाँ} \quad r\neq\nu$$

और $\qquad (4\cdot4)$

$$\int_{-1}^{1} P_\nu^{\mu}\ (x)\,P_r^{\mu}\ (x)\ dx=\frac{2(r+\mu)\,!}{(2r+1)(r-\mu)\,!},\quad \text{जहाँ} \quad r=\nu$$

(4·3) के बाईं ओर का सरलीकरण करने तथा समंजन के बाद

$$C_r=\frac{2^{\mu-1}\ \pi(2r+1)(r-\mu)\,!}{(r+\mu)\,!\ \delta\ \Gamma\left(\frac{2-\mu+r}{2}\right)\ \Gamma\left(\frac{1-\mu-r}{2}\right)}$$

$$G^{m+2\delta,\ 0;\ (Mn),\ (Nn)}_{p+2\delta,\ q+2\delta;\ (Pn),\ (Qn)}\left[\begin{array}{l|l} z_1 & [\triangle(\delta,\ \lambda-\tfrac{1}{2}\mu),\ \triangle(\delta,\ \lambda+\tfrac{1}{2}\mu),\ (a_p); \\ z_2 & \triangle(\delta,\ \lambda+\tfrac{1}{2}r+1),\ \triangle(\delta,\ \lambda-\tfrac{1}{2}r)(b_q) \\ \vdots & \\ z_n & \left\{\left(\left(c^{n}_{nP}\right)\right);\ \left(\left(d^{n}_{Qn}\right)\right)\right\} \end{array}\right] \qquad (4\cdot5)$$

(4·3) में (4·5) का उपयोग करने पर हमें (4·1) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है।

(4·2) को सिद्ध करने के लिये, माना कि

$$f(x) \equiv (1-x^2)^{\lambda-1} G\left[\begin{matrix} z_1(1-x^2)^{\delta} \\ (z_{2,\ n}) \end{matrix}\right] = \sum_{r=0}^{\infty} C_r P_r^{\mu}(x)$$

(4·6) में दोनों ओर $P_{\nu}^{\beta}(x)$ से गुणा करते हैं तथा दोनों ओर -1 से $+1$ के बीच समाकलित करते हैं और बाईं ओर का मान निकालने के लिये (3·2) का तथा दाहिनी ओर के लिये (4·4) का उपयोग करते हैं। थोड़े से सरलीकरण तथा समंजन के पश्चात् हमें

$$C_r = 2^{\mu-1} \frac{\pi(r-\mu)!\,(2r+1)}{(r+\mu)!\,\delta\, \Gamma\left(\frac{2-\mu+r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\mu-r}{2}\right)}$$

$$G^{m,\ 0;\ M_1+2\delta,\ N_1;\ (M_2,\ n),\ (N_2,\ n)}_{p,\ q;\ P_1+2\delta,\ Q_1-2\delta;\ (P_2,\ n),\ (Q_2,\ n)}$$

$$\left[\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [(a_p),\ (b_q)] \\ \left\{ \triangle(\delta, \lambda-\tfrac{1}{2}\mu),\ \triangle(\delta, \lambda+\tfrac{1}{2}\mu),\ \left(\left(c^{1}_{P_1}\right)\right); \left(\left(d^{1}_{Q_1}\right)\right), \triangle(\delta, \lambda+\tfrac{1}{2}r),\ \triangle(\delta, \lambda-\tfrac{1}{2}r) \right\} \\ \left\{\left(\left(c^{2,\ n}_{P_2,\ n}\right)\right); \left(\left(d^{2,\ n}_{Q_2,\ n}\right)\right)\right\} \end{matrix}\right]$$

प्राप्त होता है। (4·6, में (4·7) का उपयोग करके (4·2) को प्राप्त करते हैं।

5. विशिष्ट दशायें

(4·1) की निम्नांकित विशिष्ट दशायें हैं :

(i) यदि $(M_{3,\ n}) = (N_{3,\ n}) = (P_{3,\ n}) = (Q_{3,\ n}) = 0$; तथा $x_1 = x,\ x_2 = y$ का उपयोग करने पर

$$\underset{x_{3,\ n} \to \infty}{Lt}\ G(x_n) = G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

तथा $G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ में प्राचलों में सामान्य परिवर्तन करके (अग्रवाल[2]) गुलाटी[4] द्वारा दिये गये विविध फल प्राप्त करते हैं।

(ii) खाडिया[6] द्वारा दी गई विविध विशिष्ट दशाओं का उपयोग करते हुये कई अन्य रोचक विशिष्ट दशायें लिखी जा सकती हैं।

(iii) चूँकि $G(x)$ अत्यन्त सार्वीकृत G-फलन है अतः प्राचलों के विशिष्टीकरण एर्डेल्यी[3] का उपयोग करते हुये विवेचना सूत्र प्राप्त कर सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोधपत्र की तैयारी में डा० ए० एन० गोयल ने मार्गदर्शन किया जिसके लिये लेखक उनका आभारी है।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस**, 1965, **31A**, 535-46.
2. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental Functions, भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1953.
3. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral transforms, भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1254.
4. गुलाटी, एच० सी०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1971, **14**, 77-88.
5. खाडिया, एस० एस० तथा गोयल ए० एन०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1970, **13**, 191-201.
6. खाडिया, एस० एस०, **पी-एच०डी० थीसिस**, राजस्थान विश्वविद्यालय 1971.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No 3, July, 1975, Pages 187-190

बेरीलियम, मरकरी, टंग्सटन तथा ग्लुटैमिक अम्ल के बीच संकुलों का निर्माण

शिव प्रकाश, नरायणी प्रसाद तथा रणञ्जय सिंह
रसायन विभाग, इलाहाबाद यूनिवर्सिटी, इलाहाबाद

[प्राप्त—अप्रैल 30, 1975]

सारांश

ग्लुटैमिक अम्ल के साथ बेरीलियम, मरकरी तथा टंग्सटन के संकुलों के निर्माण का ध्वनिवेग मापन विधि द्वारा अध्ययन किया गया है। बेरीलियम के साथ संकुलों का निर्माण 1:2, 1:1, मरकरी के साथ 1:1, 1:2 तथा टंग्सटन के साथ 1:4, 1:2, 1:1 धातु-अम्ल अनुपात में होता है।

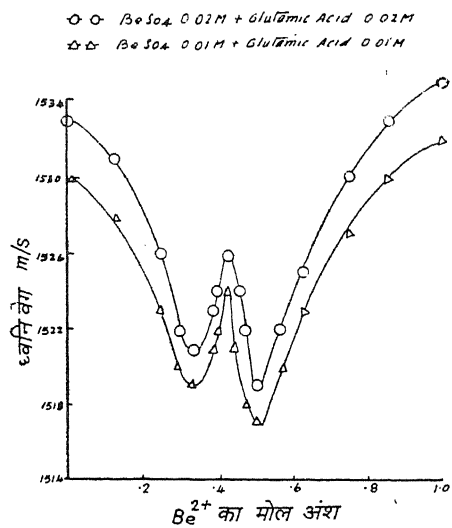
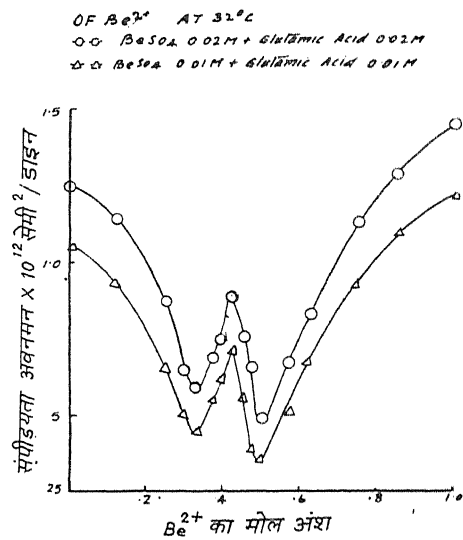
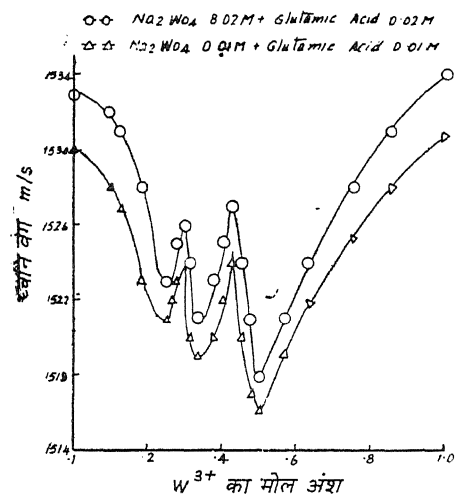
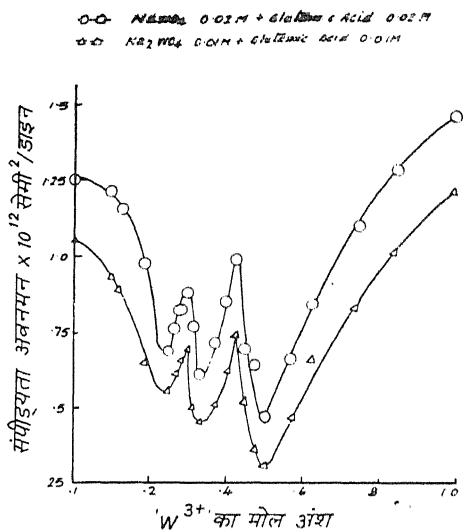
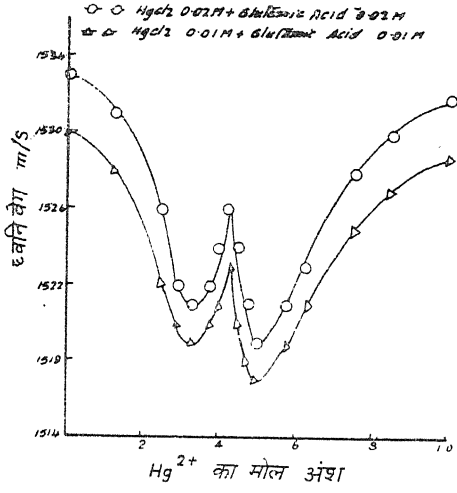
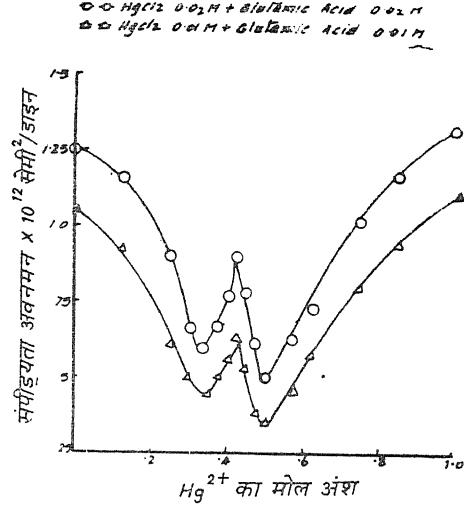
Abstract

Acid complex formation of glutamic acid with berylium, mercury and tungsten. *By* Shiv Prakash, Narayani Prasad and Rananjay Singh, Chemistry Department, Allahabad University, Allahabad.

Complex formation between beryllium, mercury and tungsten a metals and glutamic acid as ligand has been studied by ultrasonic velocity measurement method. Beryllium forms 1:2 and 1:1, mercury 1:2 and 1:1 and tungsten 1:4, 1:2 and 1:1 complexes with the acid.

ग्लुटैमिक अम्ल में संक्रमण तत्वों के साथ संयोग करके संकुल बनाने का विशिष्ट गुण है। ध्वनि वेग की सहायता से संकुलों के निर्माण का और उनके संघटन का अध्ययन किया जाता है। कपूर[1] ने ग्लुटैमिक अम्ल तथा अन्य धातुओं के संयोग से बने संकुल का अध्ययन किया और उसके संघटन का पता लगाया। चतुर्वेदी तथा प्रकाश[2] ने इस अम्ल के साथ थोरियम तथा लेड के संकुलों का संघटन ध्वनि वेग विधि से ज्ञात किया। अन्य विधियों को प्रयुक्त करके अध्ययन करने वाले कुछ वैज्ञानिकों के नाम इस प्रकार हैं:, टोकेसोदा तथा यामाजाकी[3], लार्ड तथा चांग[4], नागेश्वर राव[5] एवं रंग तथा रैलिया[6]।

प्रयोगात्मक

5 Mc/Sec आवृत्ति पर प्रकाश विवर्तन की विधि से ध्वनि का वेग 32°C पर ज्ञात किया गया। ध्वनि का स्रोत एक ऐसा जनित्र था जिसमें दोलक इकाई तथा 1 इंच व्यास का स्वर्ण लेपित क्वार्ट्ज

(चित्र 1)

(चित्र 2)

(चित्र 3)

(चित्र 4)

(चित्र 5) (चित्र 6)

ट्रांसड्यूसर था उपयुक्त फिल्टर को प्रयुक्त करके मरकरी लैम्प द्वारा प्राप्त 2657Å तरंग दैर्घ्य का प्रकाश पुंज ध्वनि तरंगों के लम्बवत् डाला गया। एकवर्णी प्रकाश प्रयुक्त करके प्रथम कोटि के फ्रिंज का फोटोग्राफ लिया गया और मापों द्वारा ध्वनि वेग ज्ञात किया गया। विलयनों को तैयार करने के लिये आसुत जल को पुनः परमैंगनेट की उपस्थिति में आसवित किया गया। ग्लुटैमिक अम्ल, बेरीलियम सल्फेट, मरक्यूरिक क्लोराइड तथा सोडियम टंग्सटेट के A.R., BDH रसायनों का घोल इसी आसुत जल में बनाया गया। विभिन्न संघटनों के विलयन बनाने के लिये जॉब की सतत् परिवर्ती विधि अपनाई गई। ग्लुटैमिक अम्ल में लवण विलयन के मिलाने के बाद विलयन का पी-एच बेरीलियम के लिये 4·1 पर, मरकरी के लिये 5·2 पर तथा टंग्सटन के लिये 5·1 पर निर्धारित किया गया। विलयन को 2 घण्टा रख छोड़ने के बाद पुनः पी-एच मापा गया और यदि थोड़ा-बहुत परिवर्तन पाया गया तो उसे ठीक समंजित कर दिया गया। इसके पश्चात् पी-एच में कोई परिवर्तन नहीं पाया गया। विलयनों के आपेक्षिक घनत्व का मान पिकनोमीटर द्वारा निकाला गया। ध्वनि वेग v तथा घनत्व ρ ज्ञात हो जाने पर संपीड्यता β की गणना $\beta=\frac{1}{v^2\rho}$ द्वारा की गई। पानी की संपीड्यता में से विलयन की संपीड्यता घटा देने पर संपीड्यता अवनमन ज्ञात हो जाता है। ध्वनि के वेग में सम्भावित त्रुटि $\pm 0{\cdot}15\,\%$ है। बेरीलियम, मरकरी तथा टंग्सटन की सान्द्रता EDTA से अनुमापन करके निर्धारित की गई।

परिणाम तथा विवेचना

अध्ययन के परिणामों को चित्रों के रूप में प्रदर्शित किया गया है। चित्र 1, 3 तथा 5 में क्रमशः बेरीलियम-ग्लुटैमिक अम्ल, मरकरी ग्लुटैमिक अम्ल तथा टंग्सटन-ग्लुटैमिक अम्ल निकायों में संघटन में परिवर्तन होने पर ध्वनि-वेगों में होने वाले परिवर्तन को दर्शाया गया है जबकि इन्हीं निकायों के संपीड्यता अवनमन परिवर्तन को चित्र 2,4 तथा 6 में प्रदर्शित किया गया है। जैसा कि इन चित्रों से स्पष्ट है

बेरीलियम तथा अम्ल 1:2,1:1 अनुपातों में, मरकरी तथा अम्ल 1:2, 1:1 अनुपातों में तथा टंग्सटन एवं अम्ल 1:4, 1:2; 1:1 अनुपातों में संयुक्त हो कर विभिन्न संकुलों का निर्माण करते हैं। वक्रों में न्यूनतम की स्थिति जान कर ही इन अनुपातों का पता किया गया। न्यूनतम की स्थिति में अधिकतम संकुलन होने की संभावना पाई जाती है। ध्वनिवेग तथा संपीड्यता के अध्ययन से यह स्पष्ट हो चुका है कि दो ऐसे अवयवों के, जिनमें आपस में अन्योन्य क्रिया नहीं होती, मिश्रण का संपीड्यता मान दोनों अवयवों में अनुपातिक मध्यमान के बराबर होता है। परन्तु यदि इसके विपरीत उनमें आपस में कोई अन्योन्य क्रिया हो रही है तो संपीड्यता का मान अनुपातिक मध्यमान से अधिक हो जाता है क्योंकि मिश्रण में युक्त आयनों की संख्या में कमी हो जाती है।

जिन अनुपातों में संकुलों के निर्माण होने की पुष्टि इन आँकड़ों से हुई है उन्हीं अनुपातों में इन संकुलों के निर्मित होने का पता विभवमापी अध्ययन द्वारा भी हुआ है[7, 8]। ग्लुटैमिक अम्ल द्विदन्तुर तथा त्रिदन्तुर लिगैण्ड के रूप में आचरण करता है। बेरीलियम, टंग्सटन तथा मरकरी से संयुक्त हो कर ग्लुटैमिक अम्ल के विभिन्न कीलेटों का निर्माण होता है।

निर्देश

1. कपूर, एस० एल०, **थीसिस**, इलाहाबाद विश्वविद्यालय 1966.
2. प्रकाश, एस० तथा चतुर्वेदी, सी० वी०, **एक्टा किमिका०**, (हंगरी) 1972, **72**, 289.
3. टोकेसोदा, एच० तथा यामाज़ाकी, एच०, **बायोपॉलीमर्स**, 1966, **4**(7), 713.
4. लाई, टी० टी० तथा चांग, टी० एल०, **एनालि० केमि०**, 1961, **33**, 1953.
5. नागेश्वर राव, जी०, **जू० साइंस इन्ड० रिसर्च**, 1962, **21**(B), 193.
6. रंग, ए० पी० तथा रैलिया, आर०, **अल० आई० कुजा इयासो**, 1964, **10**(2), 145.
7. श्रीवास्तव, एस० एन० तथा सिंह, एम० के०, **जू० इनार्ग न्यूक्लि० केमि०**, 1972, **34**, 567.
8. वही, **वही**, 1972, **34**, 2081.

Vijnana Parisad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 3, July, 1975, Pages 191-196

लागेर श्रेणी के लिये परम संकलनीयता गुणक

टीकम सिंह
राजकीय इंजीनियरिंग कालेज, उज्जैन

[प्राप्त—अप्रैल 30, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में बिन्दु $x=0$ पर लागेर श्रेणी के लिये परम संकलनीयता-गुणकों की खोज की गई है। प्राप्त परिणाम चाऊ के परिणामों के संगत है जो फूरियर त्रिकोणमितीय श्रेणी के लिये प्राप्त किया गया है।

Abstract

Absolute summability factors for Laguerre series. *By* Tikam Singh, Government Engineering College, Ujjain.

In this paper the absolute summability factors for Laguerre series are investigated at the point $x=0$. Our result corresponds to a result of Chow [2] for Fourier trigonometric series

1. माना $\Sigma\, a_n$ दी हुई अनन्त श्रेणी है तथा माना कि σ_n द्वारा $\Sigma\, a_n$ के आंशिक योगों के अनुक्रम $\{S_n\}$ के कोटि एक के nवें सेजारो माध्य का बोध होता है। श्रेणी Σa_n को पूर्णतया संकलनीय $(C, 1)$, या संकलनीय $|\, C, 1 \,|$, कहा जावेगा यदि

$$\sum_n |\, \sigma_n - \sigma_{n-1} \,|$$

अभिसारी हो। माना कि T_n द्वारा अनुक्रम $\{na_n\}$ के कटि एक का nवाँ सेजारो माध्य व्यक्त होता है तो

$$n(\sigma_n - \sigma_{n-1}) = T_n \;.\; [4]$$

फलन $f(x) \in L[0, \infty]$ से सम्बद्ध फूरियर-लागेर श्रेणी को

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, L_n^{(\alpha)}(x), \tag{1.1}$$

द्वारा व्यक्त करते हैं जहाँ

$$\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n} a_n=\int_0^\infty e^{-y}\, y^\alpha \quad L_n^{(\alpha)}(y) f(y)\, dy, \tag{1·2}$$

तथा $L_n^{(\alpha)}(x)$ कोटि $\alpha>-1$ के nवें लागेर बहुपदी का बोध होता है जिसे जनक फलन

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\, \omega^n=(1-\omega)^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{x\omega}{1-\omega}\right). \tag{1·3}$$

द्वारा परिभाषित करते हैं ।

लागेर श्रेणी (1·1) की सामान्य सेजारो संकलनीयता के लिये काग्बेलियांजा[5, 6] तथा जेगों[7] के सर्वमान्य शोध कार्य को देखना चाहिए । हाल ही में गुप्ता[3] ने एक शोध पत्र प्रकाशित किया है जिसमें फूरियर त्रिकोणमितीय श्रेणी के लिये बोसैंक्वेट[1] तथा वर्ब लंस्की[8] जैसे फलों की स्थापना की है । अभी तक किसी ने लागेर श्रेणी की परम सेज़ारो संकलनीयता पर कार्य नहीं किया है । प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य बिन्दु $x=0$ पर लागेर श्रेणी की $|c, 1|$ संकलनीयता का अध्ययन करना है । हमारे परिणाम चाऊ[2] द्वारा प्राप्त फूरियर त्रिकोणमितीय श्रेणी के लिये प्राप्त पूर्व फलों के संगत हैं ।

3.

$$\phi(y)=\{f(y)-A\}\frac{e^{-y}\, y^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

को लेकर हम निम्नांकित प्रमेय स्थापित करेंगे ।

प्रमेय : $-1<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$ तथा $\{\lambda_n\}$ के लिये अवमुख अनुक्रम ऐसा हो कि $\Sigma\lambda_n/n$ अभिसारी हो तो श्रेणी $\Sigma\, a_n\, L_n^{(\alpha)}(x)\lambda_n$ $|C, 1|$ बिन्दु $x=0$, पर संकलनीय होगी यदि

$$F(t)\equiv\int_0^t |\phi(y)|\, dy=O(t^{\alpha+1}), \text{ ज्यों-ज्यों } \quad t\to 0, \tag{3·1}$$

तथा

$$\int_1^\infty e^{y/2}\, y^{-\alpha/2-13/12}\, |\, \phi(y)\, |dy<\infty. \tag{3·2}$$

4. प्रमेय की उपपत्ति के सम्बन्ध में हमें लागेर बहुपदियों के निम्नांकित क्रम-अनुमान तथा उपगामी गुणों की आवश्यकता होगी जिसके व्यवकलन ज़ेगो[7] ने प्राप्त किये हैं ।

क्रम-अनुमान : माना α काल्पनिक तथा वास्तविक है, c तथा w स्थिर धनात्मक अचर हैं और माना $n\to\infty$, तो

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\begin{cases} x^{-\alpha/2-1/4}\, O(n^{\alpha/2-1/4}), \text{ यदि } c/n\leqslant x\leqslant w; \\ O(n^{\alpha}), \text{ यदि } 0\leqslant x\leqslant c/n. \end{cases} \tag{4·1}$$

उपगामी गुण : माना λ तथा α क्रमश: काल्पनिक तथा वास्तविक हैं, $w>0$, $0<\eta<4$ $n\to\infty$ के लिये

$$\max e^{-x/2} x^{\lambda} \left| L_n^{(\alpha)}(x) \right| \sim n^{Q}, \tag{4·2}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$Q=\begin{cases} \max(\lambda-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{4}), \text{ यदि } w\leqslant x\leqslant(4-\eta)\, n; \\ \max(\lambda-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}\alpha \quad \tfrac{1}{4}), \text{ यदि } x\geqslant w, \end{cases} \tag{4·3}$$

उच्चिष्टों को (4·3) में दाईं ओर दिये सदस्यों के अन्तराल पर लिया जाता है ।

5. इस प्रमेय की उपपत्ति के लिये हमें निम्नांकित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी ।

प्रमेयिका 1

माना $S_n^{(1)}(x)=\sum_{\nu=0}^{n} S_{\nu}(x)$, जहाँ $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ तो प्रमेय की परिकल्पना के अन्तर्गत

$$S_n^{(1)}(o)=O(n).$$

उपपत्ति :

(1·1) से,

$$S_n(o)=\{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1}\int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} f(y) \sum_{m=0}^{n}\left[\binom{m+\alpha}{m}\right]^{-1} L_m^{(\alpha)}(y)\, L_m^{(\alpha)}(o)dy$$

$$=\{\Gamma(\alpha+1)\}^{-1}\int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha}\, L_n^{(\alpha+1)}(y) f(y)\, dy,$$

निम्न सम्बन्धों के द्वारा

$$\sum_{m=0}^{n} L_m^{(\alpha)}(x)=L_n^{(\alpha+1)}(x) \text{ तथा } L_n^{(\alpha)}(o)=\binom{n+\alpha}{n}.$$

अत: लागेर बहुपदियों के लाम्बिक गुण का प्रयोग करने पर

$$S_n^{(1)}(o)-A=\int_0^{\infty} L_n^{(\alpha+2)}(y)\, \phi(y)\, dy$$

$$=\int_0^{c/n}+\int_{c/n}^{\omega}+\int_{\omega}^{\infty}$$

$$=I_1+I_2+I_3, \text{ माना} \tag{5·1}$$

(4.1) तथा (3·1), का उपयोग करने पर

$$I_1=\int_0^{c/n}\left|L_n^{(\alpha+2)}(y)\right| \, |\phi(y)| \, dy$$

$$=O(n^{\alpha+2})\int_0^{c/n} |\phi(y)| \, dy$$

$$=O(n^{\alpha+2})\, O(n^{-\alpha-1})$$

$$=O(n), \tag{5·2}$$

तथा

$$I_2=O(1)\int_{c/n}^{\omega} e^{-y}\, n^{\alpha+2/2-1/4}\, y^{-\alpha+2/2-1/4}\, |\phi(y)| \, dy$$

$$=O(n^{\alpha/2+3/4})\int_{c/n}^{\omega} y^{-\alpha/2-5/4}\, |\phi(y)| \, dy$$

$$=O(n^{\alpha/2+3/4})\left[\left\{y^{-\alpha/2-5/4}\, F(y)\right\}_{c/n}^{\omega}+\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}\right)\int_{c/n}^{\omega} y^{-\alpha/2-9/4}\, F(y)\, dy\right]$$

$$=O(n^{\alpha/2+3/4})+O(n)$$

$$=O(n), \text{ यदि } \quad -1<\alpha\leqslant\tfrac{1}{2}. \tag{5·3}$$

अन्त में (4·2) तथा (4·3) में $\lambda-\frac{1}{3}=\frac{\alpha+2}{2}-\frac{1}{4}=\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}$ रखने पर तथा परिकल्पना (3·2) का व्यवहार करने पर

$$I_3=O(1)\int_{\omega}^{\infty} e^{-y}\, n^{\alpha/2+3/4}\, e^{y/2}\, y^{-\alpha/2-13/12}\, |\phi(y)| \, dy$$

$$=O(n^{\alpha/2+3/4})\int_{\omega}^{\infty} e^{-y/2}\, y^{-\alpha/2-13/12}\, |\phi(y)| \, dy$$

$$=O(n). \tag{5·4}$$

इस प्रकार (5·1) ... (5·4) के बल पर हमें वांछित प्रमेयिका प्राप्त हो जाती है।

प्रमेयिका 2 [9, § 3·7]

यदि $\{\lambda_m\}$ अवमुख तथा परिबद्ध अनुक्रम हो तो λ_m घटता है, $m\triangle\lambda_m\to 0$, और श्रेणी

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\triangle^2\lambda_m$$

$\lambda_0=\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_m$ में अभिसरण करती है।

प्रमेयिका 3[2]

यदि $\{\lambda_m\}$ ऐसा अवमुख अनुक्रम हो कि $\Sigma\ \lambda_m/m$ अभिसारी हो तो λ_m अनृण तथा ह्रासमान है जिससे प्रमेयिका 4 के प्रतिबन्धों की तुष्टि होती है, और $\lambda_m = 0(1/\log m)$, ज्यों-ज्यों $m \to \infty$.

6. **प्रमेय की उपपत्ति** : अबेल के रूपान्तरण द्वारा

$$T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \nu\lambda_\nu\ u\nu$$

जहाँ

$$u_\nu = a_\nu\ L_\nu^{(\alpha)}(o)$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n-1} \triangle(\nu\lambda_\nu)\ s_\nu + \lambda_n\ s_n.$$

अतः

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{T_n}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{\nu=1}^{n-1} \triangle(a\lambda_\nu)\ s_\nu + \sum_{n=1}^{m} \frac{\lambda_n\ s_n}{n}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} \triangle(\nu\lambda_\nu)\ s_\nu \sum_{n=\nu}^{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \sum_{n=1}^{m} \frac{\lambda_n\ s_n}{n}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} \triangle\lambda_\nu\ s_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\lambda_\nu\ s_\nu}{\nu}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m-1} \triangle^2\lambda_\nu\ S_\nu^{(1)} + \triangle\lambda_m\ S_m^{(1)} + \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{\triangle\lambda_\nu\ S_\nu^{(1)}}{\nu}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{\lambda_\nu\ S_\nu^{(1)}}{\nu(\nu+1)} + \frac{\lambda_m}{m}\ S_m^{(1)} + O(1)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m-1} \nu\triangle^2(\lambda_\nu + m\triangle\lambda_m + \sum_{\nu=1}^{m-1} \triangle\lambda_\nu + \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{\lambda_\nu}{\nu} + \lambda_m + O(1)$$

$= O(1)$, ज्यों-ज्यों $m \to \infty$ तथा 3, 4 तथा 5 प्रमेयिकाओं के उपयोग से ।

इससे प्रमेय स्थापित हो जाता है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० जी० एस० पाण्डेय के प्रति अपना आभार व्यक्त करता है क्योंकि उन्होंने मार्गदर्शन किया । सुविधायें प्रदान करने के लिये वह प्रिंसिपल के० एस० मूर्ति को भी धन्यवाद देना चाहेगा ।

निर्देश

1. बोसैंक्वेट, एल० एस०, **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1930, **31**, 144-164.
2. चाऊ, एच० सी०, **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1941, **16**, 215-220.
3. गुप्ता, डी० पी०, **जर्न०एप्राक्सिमेशन थ्योरी**, 1973, **7**, 226-238.
4. कोगबेतलियांज, ई०, Bull. des Sci. Math., 1925, **49**, 234-256.
5. वही, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1935, **38**, 10-47.
6. वही, **जर्न० मैथ० एण्ड फिजि०**, 1935, **14**, 37-99.
7. जेगो, जी०, Orthogonal Polynomials 1959.
8. वर्ब्लंस्की, एस०, **प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1932, **33**, 384-408.
9. जिगमुंड, ए०, Trigonometrical Series, 1955.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 3, July, 1975, Pages 197-202

H-फलन वाले कतिपय परिमित संकलन II

आर० सी० मांगलिक
गणित विभाग, शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, ग्वालियर

[प्राप्त—नवम्बर 16, 1974]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में ज्ञात तत्समक का उपयोग करते हुये H-फलन वाले कतिपय परिमित संकलन प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

Some finite summations involving H-function II *By* R. C. Manglik, Department of Mathematics, Government Science College, Gwalior.

In a recent paper Sharma and Abiodun[1] have obtained some finite summations involving Meijer's G-function with help of an integral given by Shah[2]. Manglik[3] and Agrawal and Manglik [4], [5] have also obtained several similar results using the different identities of[6]. The natural generalization of G-function is Fox's H-function and the authors of[1] have not given any results involving H-function. Probably, this may be due to the fact that an integral similar to[2], which is the main tool in the derivation of their results for the G-function is not availabie for H-function. On the other hand, the results of[3], [4] and[5] can be generalized in a very simple way, using the same technique as that applied for deducing the results for the G-function. Author of this paper has already obtained some finite summations involving the H-function of one and two variables[7]. In this paper we obtain some finite summations involving the H-function, using the known identity[6].

1. हम परिणाम [6, eqn. 4·1]:

$$a\ {}_2F_1\begin{bmatrix} d+b,\ d-a-1 \\ \\ d \end{bmatrix}_{n+1} -(a+b-d)\ {}_2F_1\begin{bmatrix} d-b,\ d-a \\ \\ d \end{bmatrix}_{n+1}$$

$$=\frac{d+n-b}{n!}\frac{(d-b)_n(d-a)_n}{(d)_n} \tag{1·1}$$

का उपयोग करेंगें जहाँ बाईं ओर पादांकित $n+1$ से सूचित होता है कि इस प्रसार में F श्रेणी के केवल प्रथम $n+1$ पदों को सम्मिलित करना है।

फाक्स[8] द्वारा प्रचारित H-फलन को निम्न प्रकार से व्यक्त एवं परिभाषित किया जावेगा:

$$H^{l,u}_{p,q}\left(z\left|\begin{matrix}(a_p, e_p)\\(b_q, f_q)\end{matrix}\right.\right)=H^{l,u}_{p,q}\left(z\left|\begin{matrix}(a_1, e_1), \ldots, (a_p, e_p)\\(b_1, f_1), \ldots, (b_q, f_q)\end{matrix}\right.\right)$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)}\int_L \frac{\prod\limits_{j=1}^{l}\Gamma(b_j-f_j\,s)\prod\limits_{j=1}^{u}\Gamma(1-a_j+e_j\,s)}{\prod\limits_{j=l+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_j\,s)\prod\limits_{j=u+1}^{p}\Gamma(a_j-e_j\,s)}\;z^s\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(s)z^s\,ds \tag{1·2}$$

जहाँ रिक्त गुणनफल को इकाई माना गया है, $0\leqslant l\leqslant q$, $0\leqslant u\leqslant p$; सभी e तथा f धन हैं, L बार्नीज प्रकार का ऐसा उपयुक्त कंटूर है कि $\Gamma(b_j-f_j\,s), j=1, 2, \ldots l$ के पोल कंटूर के दाहिनी ओर पड़ें तथा $\Gamma(1-a_j+e_j\,s), j=1, 2, \ldots u$ के कंटूर के बाईं ओर। हाल ही में ब्राक्समा[9] ने H-फलन के लिए उपगामी प्रसार तथा विश्लेषिक संतति की विवेचना की है।

2. इस अनुभाग में निम्नांकित फलों को स्थापित किया जावेगा:

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\frac{1}{\Gamma(d+r)}\left[H\left(z\left|\begin{matrix}(-a, e), (a_p, e_p), (d-a-1, e), (d-b, f)\\(d-b+r, f), (d-a-1+r, e), (b_q, f_q), (1-a, e)\end{matrix}\right.\right)\right.$$

$$\left.-H\left(z\left|\begin{matrix}(d-a-b, e+f), (a_p, e_p), (d-b, f), (d-a, e)\\(d-b+r, f)(d-a+r, e), (b_q, f_q), (1+d-a-b, e+f)\end{matrix}\right.\right)\right]$$

$$=\frac{1}{r!}\frac{1}{\Gamma(d+n)}\left[H\left(z\left|\begin{matrix}(a_p, e_p), (d-b, f), (d-a, e)\\(d+n-b+1, f), (d-a+n, e), (b_q, f_q)\end{matrix}\right.\right)\right], \tag{2·1}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\frac{\Gamma(d-b+r)}{\Gamma(d+r)}\left[H\left(z\left|\begin{matrix}(-a, e), (a_p, e_p), (d-a-1, e)\\(d-a-1+r, e), (b_q, f_q), (1-a, e)\end{matrix}\right.\right)\right.$$

$$\left.-H\left(z\left|\begin{matrix}(d-a-b, e), (a_p, e_p)\ (d-a, e)\\(d-a+r, e), (b_q, f_q), (d-a-b+1, e)\end{matrix}\right.\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n!}\Gamma(d-b+n+1)\ H\left(z\left|\begin{matrix}(a_p, e_p), (d-a, e)\\(d-a+n, (b_q, f_q)\end{matrix}\right.\right), \tag{2·2}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{\Gamma(d-a-1+r)}{r!\,\Gamma(d+r)}\left[a\ H\left(z\left|\begin{matrix}(1+b-d-r, f), (a_p, e_p)\\(b_q, f_q), (1+b-d, f)\end{matrix}\right.\right)\right.$$

$$\left.-\frac{d-a-1+r}{d-a-1)}\cdot H\left(z\left|\begin{matrix}(1+b-d-r, f), (a_p, e_p), (a+b-d+1, f)\\(a+b-d, f), (b_q, f_q), (1+b-d, f)\end{matrix}\right.\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(d-a+n)}{(d-a-1)\Gamma(d+n)}\,H\left(z\left|\begin{matrix}(b-d-n,f),\,(a_p,e_p)\\(b_q,f_q),\,(1+b-d,f)\end{matrix}\right.\right), \tag{2·3}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left[a\,.\,H\left(z\left|\begin{matrix}(a_p,e_p),\,(d+r,h),\,(d-a-1,h)\\(d-b+r,h),\,(d-a-1+r,h),\,(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right)\right.$$

$$\left.-H\left(z\left|\begin{matrix}(d-a-b,h),\,(a_p,e_p),\,(d+r,h),\,(d-a,h)\\(d-b+r,h),\,(d-a+r,h),\,(b_q,f_q),\,(1-a-b+d,h)\end{matrix}\right.\right)\right]$$

$$=\frac{1}{n!}\,H\left(z\left|\begin{matrix}(a_p,e_p),\,(d+n,h),\,(d-a,h)\\(d+n-b+1,h),\,(d-a+n,h),\,(b_q,f_q)\end{matrix}\right.\right). \tag{2·4}$$

उपर्युक्त फलों की वैधता के प्रबन्धों तथा H के पादांशों को जान-बूझ कर छोड़ दिया गया है क्योंकि इनके बिना किसी प्रकार की संदिग्धता नहीं उठती ।

3. उपपत्ति

(2·1) की स्थापना के लिये इसके वाम पक्ष में (1·2) का प्रयोग करने पर हमें

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\frac{1}{\Gamma(d+r)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_L f(s)\left[\frac{\Gamma(a+1+es)}{\Gamma(a+es)}\frac{\Gamma(d-b-fs+r)}{\Gamma(d-b-fs)}\frac{\Gamma(d-a-1-es+r)}{\Gamma(d-a-1-es)}\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma(a+b+es+fs-d+1)}{\Gamma(a+b+es+fs-d)}\frac{\Gamma(d-b-fs+r)}{\Gamma(d-b-fs)}\frac{\Gamma(d-a-es+r)}{\Gamma(d-a-es)}\right]z^s\,ds.$$

प्राप्त होता है । संकलन तथा समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L f(s)\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!\,\Gamma(d+r)}\Big[(a+es)(d-b-fs)_r(d-a-1-es)_r$$

$$-(a+b+es+fs-d)(d-b-fs)_r(d-a-es)_r\Big]z^s\,ds.$$

अब (1·1) का उपयोग करते हुये हमें (2·1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है जिससे फल की सिद्ध होती है । इसी प्रकार परिणाम (2·2), (2·3) तथा (2·4) भी सिद्ध किये जा सकते हैं ।

4. हाल ही में अग्रवाल तथा माथुर [10, p. 536] ने दो चरों वाले H-फलन का सूत्रपात मेलिन-बार्नीज़ प्रकार के समाकल के रूप में किया है । इसकी अभिव्यक्ति तथा परिभाषा निम्न प्रकार से की जावेगी

$$H\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=H\left[x,y\left|\begin{bmatrix}m_1,\,o\\p_1,\,q_1\end{bmatrix}\begin{matrix}(a_{p_1},\,\alpha_{p_1})\\(b_{q_1},\,\beta_{q_1})\end{matrix}\right|\begin{pmatrix}n_2,\,m_2\\p_2,\,q_2\end{pmatrix}\begin{matrix}(c_{p_2},\,\gamma_{p_2})\\(d_{q_2},\,\delta_{q_2})\end{matrix}\left|\begin{pmatrix}n_3,\,m_3\\p_3,\,q_3\end{pmatrix}\begin{matrix}(e_{p_3},\,\sigma_{p_3})\\(f_{q_3},\,\epsilon_{q_3})\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L'}\int_{L''}\phi(s+t)\psi(s,t)x^s y^t\,ds\,dt \tag{4·1}$$

जहाँ (i) (a_{p_1}, α_{p_1}) के द्वारा प्राचलों का सेट $(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2), \ldots, (a_{m_1}, \alpha_{m_1}); (a_{m_1+1}, \alpha_{m_1+1}), \ldots (a_{p_1}, \alpha_{p_1})$ व्यक्त होता है। इसी प्रकार के प्राचलों के सेटों को $(b_{q_1}, \beta_{q_1}), (c_{p_2}, \gamma_{p_2})(d_{q_2}, \delta_{q_2})$ के द्वारा व्यक्त करते हैं।

(ii) $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma$ तथा ϵ सभी धन हैं

(iii) L' तथा L'' उपयुक्त कंटूर हैं तथा

$$\text{(iv)}\quad \phi(s+t)=\frac{\prod_{j=1}^{m1}\Gamma(a_j+\alpha_j s+\alpha_j t)}{\prod_{j=m_1+1}^{p1}\Gamma(1-a_j-\alpha_j s-\alpha_j t)\prod_{j=0}^{q1}\Gamma(b_j+\beta_j s+\beta_j t)}.$$

$$\psi(s,t)=\frac{\prod_{j=1}^{m2}\Gamma(1-c_j+\gamma_j s)\prod_{j=1}^{n2}\Gamma(d_j-\delta_j s)\prod_{j=1}^{m3}\Gamma(1-e_j+\sigma_j t)\prod_{j=1}^{n3}\Gamma(f_j-\epsilon_j t)}{\prod_{j=m_2+1}^{p2}\Gamma(c_j-\gamma_j s)\prod_{j=n_2+1}^{q2}\Gamma(1-d_j+\delta_j s)\prod_{j=m_3+1}^{p3}\Gamma(e_j-\sigma_j t)\prod_{j=n_3+1}^{q3}\Gamma(1-f_j+\epsilon_j t)}.$$

यदि

$$2(m_1+m_2+n_2)>p_1+q_1+p_2+q_2$$

$$2(m_1+m_3+n_3)>p_1+q_1+p_3+q_3$$

$$|\arg(x)|<[m_1+m_2+n_2-\tfrac{1}{2}(p_1+q_1+p_1+q_2)]\pi$$

$$|\arg(y)|<[m_1+m_3+n_3-\tfrac{1}{2}(p_1+q_1+p_3+q_3)]\pi$$

या $[p_1+p_2<q_1+q_2, p_1+p_3<q_1+q_3]$ या $[p_1+p_2=q_1+q_2, p_1+p_3=q_1+q_3]$ तथा $|x|<1$, $|y|<1$ द्विगुण समाकल (4·1) अभिसारी होगा। (4·2)

5. इस अनुभाग में अनुभाग 4 में परिभाषित दो चरों वाले H-फलन वाले परिणामों की स्थापना की जावेगी।

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left\{H\left[x,y\left|\begin{bmatrix}m_1+1, o\\ p_1+1, q_1+1\end{bmatrix}\begin{matrix}(d-a+r-1,h),(a_{p_1},\alpha_{p_1})\\(b_{q_1},\beta_{q_1}),(d-a-1,h)\end{matrix}\right|\right.\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}n_2, m_2+1\\ p_2+1, q_2+1\end{pmatrix}\begin{matrix}(1-d+b-r,h),(c_{p_2},\gamma_{p_2})\\(d_{q_2},\delta_{q_2}),(1-d-r,h)\end{matrix}\left|\begin{pmatrix}n_3+1, m_3\\ p_3+1, q_3+1\end{pmatrix}\begin{matrix}(e_{p_3},\sigma_{p_3}),(a,h)\\(1+a,h),(f_{q_3},\epsilon_{q_3})\end{matrix}\right|\right]$$

$$+H\left[x,y\left|\begin{bmatrix}m_1+2, o\\ p_1+2, q_1+2\end{bmatrix}\begin{matrix}(d-a+r-b,h),(d-a+r,h),(a_{p_1},\alpha_{p_1})\\(b_{q_1},\beta_{q_1});(d-a-b,h),(d-a,h)\end{matrix}\right|\right.$$

$$\left.\left.\begin{pmatrix}n_2, m_2+1\\ p_2+1, q_2+1\end{pmatrix}\begin{matrix}(1-d+b-r,h),(c_{p_2},\gamma_{p_2})\\(d_{q_2},\delta_{q_2}),(1-d-r,h)\end{matrix}\left|\begin{pmatrix}n_3, m_3\\ p_3, q_3\end{pmatrix}\begin{matrix}(e_{p_3},\sigma_{p_3})\\(f_{q_3},\epsilon_{q_3})\end{matrix}\right|\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{n!}H\left[x,y\left|\begin{bmatrix}m_1+1, o\\ p_1+1, q_1+1\end{bmatrix}\begin{matrix}(d-a+n, h), (a_{p_1}, \alpha_{p_1})\\ (b_{q_1}, \beta_{q_1}), (d-a, h)\end{matrix}\right|\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}n_2, m_2+1\\ p_2+1, q_2+1\end{pmatrix}\begin{matrix}(b-d-n, h), (c_{p_2}, \gamma_{p_2}\\ (d_{q_2}, \delta_{q_2}). (1-d-n, h)\end{matrix}\left|\begin{pmatrix}n_3, m_3\\ p_3, q_3\end{pmatrix}\begin{matrix}(e_{p_3}, \sigma_{p_3})\\ (f_{q_3}, \epsilon_{q_3})\end{matrix}\right|\right], \quad (5\cdot1)$$

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left\{a.H\left[x,y\left|\begin{bmatrix}m_1+1, o\\ p_1+1, q_1\end{bmatrix}\begin{matrix}(d-b+r, h), (a_{p_1}, \alpha_{p_1})\\ (b_{q_1}, \beta_{q_1})\end{matrix}\right|\right.\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}n_2, m_2+1\\ p_2+1, q_2+2\end{pmatrix}\begin{matrix}(2-d+a-r, h), (c_{p_2}, \gamma_{p_2})\\ (d_{q_2}, \delta_{q_2}), (2-d+a, h), (1-d-r, h)\end{matrix}\left|\begin{pmatrix}n_3, m_3\\ p_3, q_3\end{pmatrix}\begin{matrix}(e_{p_3}, \sigma_{p_3})\\ (f_{q_3}, \epsilon_{q_3})\end{matrix}\right|\right]$$

$$+H\left[x,y\left|\begin{bmatrix}m_1+2, o\\ p_1+2, q_1+1\end{bmatrix}\begin{matrix}(d-b+a+1, h), (d-b+r, h), (a_{p_1}, \alpha_{p_1})\\ (b_{q_1}, \beta_{q_1}), (d-b+a, h)\end{matrix}\right|\right.$$

$$\left.\left.\begin{pmatrix}n_2, m_2+1\\ p_2+1, q_2+2\end{pmatrix}\begin{matrix}(1-d+a-r, h)\ (c_{p_2}, \gamma_{p_2})\\ (d_{q_2}, \delta_{q_2}), (1-d+a, h), (1-d-r, h)\end{matrix}\left|\begin{pmatrix}n_3, m_3\\ p_3, q_3\end{pmatrix}\begin{matrix}(e_{p_3}, \sigma_{p_3})\\ (f_{q_3}, \epsilon_{q_3})\end{matrix}\right|\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{n!}H\left[x,y\left|\begin{bmatrix}m_1+1, o\\ p_1+1, q_1\end{bmatrix}\begin{matrix}(d-b+n+1, h), (a_{p_1}, \alpha_{p_1})\\ (b_{q_1}, \beta_{q_1})\end{matrix}\right|\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}n_2, m_2+1\\ p_2+1, q_2+2\end{pmatrix}\begin{matrix}(1-d+a-n, h), (c_{p_2}, \gamma_{p_2})\\ (d_{q_2}, \delta_{q_2}), (1-d+a, h), (1-d-n, h)\end{matrix}\left|\begin{pmatrix}n_3, m_3\\ p_3, q_3\end{pmatrix}\begin{matrix}(e_{p_3}, \sigma_{p_3})\\ (f_{q_3}, \epsilon_{q_3})\end{matrix}\right|\right], \quad (5\cdot2)$$

जहाँ वैधता के प्रतिबन्ध (4·2) से स्पष्ट हैं।

उपपत्ति

(5·1) को सिद्ध करने के लिये इसके वाम पक्ष में हम (4·1) का सम्प्रयोग करते हैं

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L'}\int_{L''}\phi(s+t)\psi(s,t)$$

$$\cdot\left[\frac{\Gamma(a-ht+1)\Gamma(d-b+hs+r)\Gamma(d-a+hs+ht-1+r)}{\Gamma(a-ht)\Gamma(d+hs+r)\Gamma(d-a+hs+ht-1)}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(d-a-b+hs+ht+r)\Gamma(d+b+hs+r)\Gamma(d-a+hs+ht+r)}{\Gamma(d-a-b+hs+ht)\Gamma(d+hs+r)\Gamma(d-a+hs+ht)}\right].\ x^s y^t\,ds\,dt$$

अब संकलन तथा समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L'}\int_{L''}\phi(s+t)\psi(s,t)\ \sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\frac{\Gamma(d-b+hs+r)}{\Gamma(d+hs+r)}\Big[(a-ht)(d-a+hs+ht-1)_r$$

$$+(d-a-b+hs+ht)_r(d-a+hs+ht)_r\Big]\ x^s y^t\,ds\,dt.$$

अब (1·1) के उपयोग से हमें (5·1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है। इससे परिणाम की सिद्धि होती है। इसी प्रकार (5·2) भी सिद्ध किया जा सकता है।

6. अनुभाग 2 तथा 4 के परिणामों से समस्त c, f तथा h को इकाई के तुल्य रखने पर अग्रवाल तथा मांगलिक का फल[1] प्राप्त होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० बी० एम० अग्रवाल के प्रति आभार प्रकट करता है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में सहायता पहुँचाई है।

निर्देश

1. शर्मा, बी० एल० तथा अवियाडन, आर० एफ० ए०, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. Roumanie 1971, **15**(63)
2. शाह, एम०, **प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०**, 1969, 65
3. मांगलिक, आर० सी०, **जर्न० जीवाजी यूनिवर्सिटी में प्रकाशनार्थ स्वीकृत**, 1974
4. अग्रवाल, बी० एम० तथा मांगलिक, आर० सी० **ज्ञानाभा में प्रकाशनाधीन A 4**, (1974)
5. वही, **प्रकाशनार्थ प्रेषित**
6. वही, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1974, **17**, 123-127
7. मांगलिक, आर० सी०, **इण्डि० जर्न० प्योर एण्ड ऐप्लाइड मैथ०** (**प्रकाशनाधीन**)
8. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429
9. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Compositio Math 1963 **15**, 239-341
10. अग्रवाल, आर० डी० तथा माथुर ए० बी० **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया** 1969 p. 536

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 18, No 3, July, 1975, Pages 203-208

इंसुलेटर में एकाकी इंजेक्शन धारा

वाई० के० शर्मा
भौतिकी विभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी,
बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—अक्टूबर 12, 1974]

सारांश

एक इंसुलेटर में, एकाकी इंजेक्शन धारा के हेतु क्रांतिक धाराओं तथा वोल्टताओं का एक व्यंजक परिकलित किया गया है, जिसमें फर्मी स्तर के ऊपर ट्रैपों का एकाकी समुच्चय है जहाँ गतिशीलता वाहकों की सान्द्रता की प्रत्यक्षतः समानुपाती है।

Abstract

Single injection current in the insulator with traps lying above the fermi and carrier density dependent mobility. *By* Y. K. Sharma, Physics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

An expression for the critical and current voltages have been calculated for the single injection current in a insulator with a single set of traps lying above the fermi level where the mobility is directly proportional to the concentration of the carriers.

1. विषय प्रवेश

लैम्पर्ट तथा पीटर मार्क[2] ने इंसुलेटर में निम्न क्षेत्र गतिशीलता तथा एकाकी इंजेक्शन धारा के लिये धारा वोल्टता अभिलक्षणों का परिकलन किया है। यहाँ इसी विधि का अनुसरण ऐसे निकाय के लिये किया गया है जिसमें गतिशीलता प्रत्यक्षतः इलेक्ट्रानों की सान्द्रता के समानुपाती है। इस प्रकार धारा वोल्टता अभिलक्षणों के विभिन्न प्रभाव क्षेत्रों के लिये गतिशीलता में अन्तर होता है और यह संगत प्रभाव क्षेत्र में विद्यमान कणों पर निर्भर होता है। क्षेत्रीय सन्निकटन[2-8] की सहायता से इंसुलेटर को अवीकाश आवेश तथा ओमीय क्षेत्र में विभाजित किया जा सकता है। धारा तथा प्वायसाँ नियम के लिये निर्देश[2,3] की भाँति समीकरण लिखे जा सकते हैं:

$$J = e\mu n E \tag{1}$$

$$\frac{\epsilon}{e}\frac{dE}{dx} = [n(x) - n_0] + [p_{t,0} - p_t(x)] \tag{2}$$

$$p_t(x) = \frac{N_t N}{gn(x)}, \quad p_{t,0} = \frac{NtN}{gn(o)}, \quad N = N_c \exp\left[\frac{E_t - E_c}{kT}\right] \tag{3}$$

जहाँ g ट्रैपों का सांख्यिकीय भार, N_t इलेक्ट्रान ट्रैपों का सार्थक घनत्व है जो फर्मी तल के ऊपर ऊर्जा तल E_t पर है; n_0 ऊष्मा विधि से जनित इलेक्ट्रान हैं, N_c संचालन बैंड़ में प्रभावी घनत्व है, k बोल्टमान स्थिरांक है और T परम जालक ताप है। वाहक घनत्व पर गतिशीलता की आश्रिता के लिये सम्बन्ध दिया जा सकता है[1]

$$\mu = hn(x) \tag{4}$$

जहाँ h समानुपातिकता स्थिरांक है। इंसुलेटर को विभिन्न प्रभाव क्षेत्रों में विलग करने का प्रक्रम निर्देश[2,3] की भाँति है। इंसुलेटर के विभिन्न क्षेत्रों के अभिलाक्षणिक समीकरण निम्न प्रकार हैं:

क्षेत्र I ($0 \leqslant x \leqslant x_1$)

$$J = e\mu n E \tag{5}$$

$$\frac{\epsilon}{e}\frac{dE}{dx} = n(x) \tag{6}$$

$$\mu = hn(x) \tag{7}$$

क्षेत्र II ($x_1 \leqslant x \leqslant x_2$)

$$J = e\mu n E \tag{8}$$

$$\frac{\epsilon}{e}\frac{dE}{dx} = N_t \quad \text{तथा} \quad \frac{N_t}{n_0} = B \tag{9}$$

$$\mu = hn(x) \tag{10}$$

क्षेत्र III ($x_2 \leqslant x \leqslant x_3$)

$$J = e\mu n E \tag{11}$$

$$\frac{\epsilon}{e}\frac{dE}{dx} = \frac{n}{\theta} \quad \text{जहाँ} \quad \mu = \frac{N}{gN_t} \tag{12}$$

$$\mu = hn(x) \tag{13}$$

क्षेत्र IV ($x_3 \leqslant x \leqslant L$)

$$J = e\mu n_0 E \tag{14}$$

$$\frac{\epsilon}{e}\frac{dE}{dx}=0 \tag{15}$$

$$\mu=hn_0 \tag{16}$$

जहाँ x_1, x_2 तथा x_3 क्रान्तिक तल हैं जो इंसुलेटर को अवकाश आवेश क्षेत्रों (I, II तथा III) तथा ओमीय क्षेत्र (IV) में विलग कर देते हैं। संक्रमण तलों को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है:

$$n(x_1)=p_{t,0},\ \ n(x_2)=\frac{N}{g},\ \ \text{तथा}\ \ n(x_3)=n_0 \tag{17}$$

तीन संक्रमण तलों के संगत तीन क्रांतिक धारायें हैं जिन्हें

$$x_3(J_{c\gamma,1})=L,\ x_2(J_{c\gamma,2})=L,\ x_1(J_{c\gamma,3})=L \tag{18}$$

के द्वारा परिभाषित किया जाता है। संक्रमण तलों पर विद्युत क्षेत्र का सातत्य निम्न प्रकार होता है

$$E(x_1^-)=E(x_1^+),\ E(x_2^-)=E(x_2^+),\ E(x_3^-)=E(x_3^+) \tag{19}$$

समीकरण (1) तथा (4) से गतिशीलता

$$\mu=\sqrt{\frac{Jh}{eE}} \tag{20}$$

हो जाती है।

इस समस्या को हल करने के लिये नीचे दिये हुये विमाहीन चरों की कल्पना करना श्रेयस्कर होगा

$$u=\frac{n_0}{n(x)}=\frac{n_0 e\mu E}{J}=n_0\sqrt{\frac{heE}{J}} \tag{21}$$

$$w=\frac{e^2n_0^2\mu x}{\epsilon J}=\frac{en_0^2x}{\epsilon}\sqrt{\frac{he}{JE}} \tag{22}$$

$$v=\frac{e^3n_0^3\mu^2V(x)}{\epsilon J^2}=\frac{e^2n^3{}_0hV(x)}{\epsilon JE} \tag{23}$$

जहाँ μ का मान समीकरण[(20)] में से प्रतिस्थापित किया जाता है। पृथक पृथक क्षेत्र के लिये क्रान्तिक धाराओं का मान निम्नलिखित प्रकार से परिगणित किया जा सकता है।

क्षेत्र I

विमाहीन चरों (21), (22) तथा (23) के पदों में प्वायसाँ समीकरण (6) निम्नवत् होगा

$$2\,u^2du=d(uw) \tag{24}$$

समाकलन के पश्चात्

$$u^2=\frac{3w}{2} \tag{25}$$

विमाहीन चर (23) से (26) प्राप्त होता है।

$$\frac{V}{E}=\frac{\int_0^x E\,dx}{E}\longrightarrow v=\frac{1}{u^2}\int_0^w\int_0^u u^2 d(uw)$$

$$=\frac{1}{u^2}\int_0^u 2\,u^4 du=\frac{2\,u^3}{5} \tag{26}$$

क्षेत्र I तथा II के मध्य जोड़ने वाले तल पर समीकरण (18), (19), (21)-(23), (25) तथा (26) का प्रयोग करने पर

$$x=x_1:\ u_1=\frac{2}{B},\ w_1=\frac{8}{3B^2},\ v_1=\frac{16}{5B^3},\ x_1=\frac{16\,\epsilon J}{3e^2 n_0^3 B^3 h} \tag{27}$$

तथा
$$J_{c\gamma,3}=\frac{3e^2 n_0^3\,B^3 hL}{16\,\epsilon} \tag{28}$$

क्षेत्र II

समीकरण (9), (21), (22) तथा (23) से क्षेत्र II में व्यायमी समीकरण निम्नवत् हो जायेगा

$$udu=\frac{B}{2}\ d(uw) \tag{29}$$

समाकलन के पश्चात्

$$(u-u_1)=B(w-w_1)\longrightarrow w=\frac{u}{B}+\frac{2}{3B^2} \tag{30}$$

इस क्षेत्र के लिये विमाहीन चर (23) निम्नवत् है:

$$u=\frac{2}{Bu^2}\int_{u_1}^u u^3\ du=\frac{u^2}{2B}-\frac{8}{B^5 u^2} \tag{31}$$

जहाँ μ का मान समीकरण (21) में से प्रतिस्थापित किया जाता है। जोड़ने वाले तल x_1 पर विभिन्न मान इस प्रकार होंगे:

$$x=x_2:\ u_2=\frac{2}{\theta B},\ \ w_2=\frac{2}{\theta B^2}+\frac{2}{3B^2},\ v_2=\frac{2}{\theta^2 B^3}-\frac{2B^2}{B^3} \tag{32}$$

$$x_2=\frac{4\,\epsilon J}{\theta B^3 e^2 n_0^3 h},\ J_c\gamma_{,2}=\frac{\theta B^3 e^2 n_0^3 hL}{4\,\epsilon} \tag{33}$$

अन्य क्षेत्रों में ये मान निम्नवत् दिये जाते हैं :

क्षेत्र III

$$(w-w_2)=\frac{\theta}{2}\,(u^2-u_2^2)\longrightarrow w=\frac{\theta u^2}{2}+\frac{2}{3B^2} \tag{34}$$

जहाँ u_2 तथा w_2 के मान समीकरण (32) में से प्रतिस्थापित किये जाते हैं । समीकरण (26) तथा (31) की ही तरह इस क्षेत्र के लिये चर v

$$v=\frac{u^3}{5\theta B}-\frac{32}{5\theta B^6 u^2} \tag{35}$$

होगा तथा जोड़ने वाले तल x_3 पर

$$x=x_3:\ u_3=1,\ w_3=\frac{\theta}{2}+\frac{2}{3B^2},\ v_3=\frac{1}{5\theta B}-\frac{32}{5\theta B^6} \tag{36}$$

$$x_3=\frac{\theta\,\epsilon J}{2he^2 n_0^3},\ J_{c\gamma,1}=\frac{2he^2n_0^3L}{\theta\,\epsilon} \tag{37}$$

होगा ।

क्षेत्र IV

$$u=1,\ v=v_3+(w-w_3)=w-\frac{\theta}{2}-\frac{2}{3B^2}+\frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{5B}-\frac{32}{5B^6}\right] \tag{38}$$

2. संक्रान्तिक वोल्टतायें

जैसा कि लैम्पर्ट[2·3] में दिया है, विमाहीन चरों के पदों में धारा-वोल्टता अभिलक्षणों को परिकलित करना कठिन है क्योंकि समीकरण (21), (22) तथा (23) में E पद है जबकि लैम्पर्ट समीकरण (4·15) में विमाहीन चरों का प्रयोग विद्युत क्षेत्र, दूरी तथा वोल्टता के लिये पृथक पृथक हुआ है । फिर भी, यह सरलता से दिखाया जा सकता है कि इन्सुलेटरों में निर्देश[2·3] की भाँति अब भी विभिन्न प्रभाव क्षेत्र विद्यमान हैं । विभिन्न धारा-वोल्टता प्रभाव क्षेत्र निम्नवत् हैं:

$J<J_{c\gamma,1}$ इन्सुलेटर में चारों क्षेत्र विद्यमान हैं

$J_{c\gamma,1}<J<J_{c\gamma,2}$ क्षेत्र IV तथा विलुप्त हो जाता है

$J_{c\gamma,2}<J<J_{c\gamma,2}$ क्षेत्र I तथा II विद्यमान है

$J_{c\gamma,2}<J$ केवल क्षेत्र I विद्यमान है,

$J<J_{c\gamma,1}$ के लिये समीकरण (25) में से μ_a को (26) में प्रतिस्थापित करने पर निम्नांकित सम्बन्ध प्राप्त होता है

$$\left(\frac{v_\alpha}{w_a^2}\right)^2=\frac{27}{50}\frac{1}{w_a} \tag{39}$$

यह सरलता से इंगित किया जा सकता है कि सम्बन्ध (39) स्थायी गतिशीलता प्रसंग (लैम्पर्ट तथा पीटर मार्क समीकरण 4·39) का ट्रैप मुक्त वर्ग नियम है जिसे ओम का नियम होना चाहिए (निर्देश[2,3] के अनुसार) क्योंकि यदि $J<J_{c\gamma,1}$ तो इंसुलेटर में सभी क्षेत्र विद्यमान रहते हैं और यही ओम नियम का प्रभाव क्षेत्र है। इस तरह वाहक घनत्व आश्रित गतिशीलता के प्रसंग में धारा-वोल्टता अभिलक्षणों को विमाहीन चरों के पदों में परिकलित नहीं किया जा सकता ।

$J=J_{c\gamma,1}$, $J=J_{c\gamma,2}$ तथा $J=J_{c\gamma,3}$ के संगत ऐनोड पर विमाहीन चरों के क्रांतिक मान क्रमशः

$$v_{\alpha,c\gamma,2} \simeq \frac{1}{5\theta B}, \; v_{\alpha,c\gamma,2} \simeq \frac{2}{\theta^2 B^3}, \text{ तथा } v_{\alpha,c\gamma,3}=\frac{16}{5B^3}$$

हैं। ये मान समीकरण (36), (32) तथा (27) से प्राप्त किये जाते हैं। इन फलों का उपयोग समीकरण (21), (22) तथा (23) में करने पर क्रांतिक धाराओं की संगत वोल्टतायें

$$V_{c\gamma,1}=\frac{\epsilon J^2_{c\gamma,1}}{5\theta Be^3 n_0^5 h^2}=\frac{4en_0L^2}{5\theta^2 \epsilon B} \tag{40}$$

$$V_{c\gamma,2}=\frac{8 \epsilon J^2_{c\gamma,2}}{\theta^4 B^5 e^3 n_0^5 h_2}=\frac{Ben_0L^2}{2\theta^2 \epsilon} \tag{41}$$

$$V_{c\gamma,3}=\frac{9Ben_0L^2}{20 \epsilon} \tag{42}$$

हैं जहाँ समीकरण (40) तथा (41) में $J_{c\gamma,1}$ तथा $J_{c\gamma,2}$ के मान (33) तथा (32) में से प्रतिस्थापित हैं।

निर्देश

1. विंटल, एच० जे०, जर्न० ऐप्ला० फिजि०, 1972, **43**, 247
2. लैम्पर्ट, एम० ए० तथा पीटर मार्क, Current Injection in Solids, अध्याय 4, एकडेमिक प्रेस न्यूयार्क, लन्दन 1970
3. विलार्डसन, आर० के० तथा बियर, ए० सी०, eds., Semiconductors and Semimetals. भाग 6 एकडेमिक प्रेस न्यूयार्क, लन्दन 1970
4. शर्मा, वाई० के०, Solid State Electron 1974, **17**, 762
5. वही, Can. Jl. Phys 1974, 52, 399
6. वही, इंडि० जर्न० प्योर एंड ऐप्ला० फिजि० (प्रकाशनाधीन)
7. वही, फिजिक्स रिव्यू (प्रकाशनाधीन)
8. शर्मा, वाई० के० तथा श्रीवास्तव, वी० वी०, इंडियन जर्न० प्योर एंड ऐप्ला० फिजि०, 1974, **12**, 169

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 3, July 1975, Pages 209-213

स्तरीय फिल्म संघनन पर बाष्प अपरूपक प्रतिबल का प्रभाव

जी० के० अग्रवाल
यांत्रिक अभियांत्रिकी विभाग, राजकीय इंजीनियरी महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—जनवरी 7, 1975]

सारांश

एक चपटी ऊर्ध्वाधर प्लेट पर बाष्पों के नुसेल्ट प्रकार के संघनन में अन्तरापृष्ठ पर बाष्प अपरूपक प्रतिबल के प्रभाव का विश्लेषण प्रस्तुत किया गया है। परिणामी बीजीय समीकरण को मैडेजस्की का अनुगमन करते हुये समाकलित किया गया है।

Abstract

Effect of vapour shear stress on laminar film condensation. *By* G. K. Agarwal, Mechanical Engineering Department, Government Engineering College, Ujjain.

In the analysis given below the effect of vapour shear stress at the interface is analysed in the Nusselt type condensation of vapours on a flat vertical plate. The resulting algebraic equation is integrated on the lines followed by Madejski.[1]

नामकरण	पादांक
ζ —घनत्व	
μ —गति श्यानता	m माध्य
δ —फिल्म की मोटाई	m,N माध्य नुसेल्ट मान
λ —संघनन की गुप्त ऊष्मा	
$\triangle T$ —ताप अवनमन	
g —गुरुत्व के कारण त्वरण	
a —ऊष्मा स्थानान्तरण गुणांक	

नामकरण पादांक

K —उष्मीय चालकता

d —नलिका व्यास

τ —अपरूपक प्रतिबल

$\left(\frac{\zeta g k}{\tau}\right)$ —α के समान इकाइयाँ

Γ —संघनन संहृति प्रवाह

x —कोटि

नुसेल्ट फिल्म की मोटाई निकालने के लिये सामान्यतः गुरुत्व के अन्तर्गत जल निकास पर विचार करते हैं और

$$\mu\left(\frac{\partial_2 v}{\partial y^2}\right)=-\zeta g$$

समीकरण को सीमा प्रतिबन्धों

$$v=0 \; y=0 \text{ पर}$$

$$\mu\frac{\partial v}{\partial y}=0 \; y=\delta \text{ पर}$$

फिल्म की मोटाई के लिये हल करते हैं।

फिर भी मान लेते हैं कि अन्तरापृष्ठ पर समान अपरुपक प्रतिबल τ विद्यमान है। यद्यपि कि τ प्लेट की लम्बाई की दिशा में संघनन के फलस्वरूप संहृति विलग होने के कारण परिवर्तित होता है।

यह मान लिया गया है कि संघनन से संवेग विनिमय प्रभाव नगण्य हैं और τ का मान प्लेट की लम्बाई के लिये औसत है।

$$\Gamma=\frac{g\zeta^2}{\mu}\frac{\delta^3}{3}+\frac{\tau}{\mu}\frac{\zeta\delta^2}{2}$$

अतः
$$\frac{d\Gamma}{d\delta}=\left[\frac{\zeta^2 g\delta^2}{\mu}+\frac{\tau\zeta\delta}{\mu}\right]$$

$$\frac{q}{A}=\frac{K\triangle T}{\delta}=\lambda\left(\frac{d\Gamma}{dx}\right)$$

या
$$\frac{K\triangle T}{\delta}=\lambda\,\frac{d\delta}{dx}\left(\frac{d\Gamma}{d\delta}\right)$$

अथवा
$$\lambda d\delta\left[\frac{\zeta^2 g\delta^3}{\mu}+\frac{\zeta\tau\delta^2}{\mu}\right]=K\triangle T\,.\,dx$$

समाकलित करने पर

$$\delta^4\left[\frac{\zeta^2 g\lambda}{4K\mu\triangle Tx}\right]+\delta^3\left[\frac{\tau\lambda\zeta}{3\mu K\triangle Tx}\right]=1$$

अथवा $\delta^4+A_2\delta^3=\frac{x}{A_1}$ जहाँ $A_1=\frac{\zeta^2 g\lambda}{4K\mu\triangle T}$, $A_2=\frac{4\tau}{3\zeta g}$ (1)

स्थानीय उष्मा स्थानान्तरण गुणांक को

$$\alpha=\frac{K}{\delta} \text{ तथा } \alpha_m=\frac{1}{x}\int_0^x \frac{Kdx}{\delta} \quad (2)$$

द्वारा अथवा नुसेल्ट माडुलस

$$(N_u)_m=\frac{\alpha_m x}{K}=\int_0^x \frac{dx}{\delta} \quad (3)$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है। समीकरण (1) में विमाहीन संख्याओं

$$u=A_2\left(\frac{A_1}{x}\right)^{1/4},\; v=\delta\left(\frac{A_1}{x}\right)^{1/4} \quad (4)$$

को प्रविष्ट करने पर

$$v^4+uv^3=1 \quad (5)$$

चूँकि
$$x=\frac{A_2^4 A_1}{u^4},\; dx=-\frac{4A_2^4 A_1}{u^5}\,du.$$

अतः हमें समीकरण (6) प्राप्त होता है

$$(N_u)_m=\frac{4}{3}A_2^3 A_1\int_u^\infty \frac{3\,du}{vu^4} \quad (6)$$

इसमें
$$u=\frac{1-v^4}{v^3},\; du=-\left(\frac{3}{v^4}+1\right)dv \quad (7)$$

प्रतिस्थापित करने पर हमें (8) प्राप्त होता है।

$$(N_u)_m=4A_2^3 A_1\int_0^v \frac{(3+v^4)v^7\,dv}{(1-v^4)^4} \quad (8)$$

$$y=1-v^4,\ dy=-4v^3\ dv \tag{9}$$

प्रतिस्थापित करने पर समीकरण (10) मिलता है

$$(N_u)_m=A_2^3\ A_1 \int_y^1 \frac{(4-y)(1-y)}{y^4}\ dy$$

$$=A_2^3\ A_1 \int_y^1 \frac{y^2-5y+4)}{y^4}\ dy$$

$$=A_2^3 A_1 \left[-\frac{1}{y}+\frac{5}{2y^2}-\frac{4}{3y^3}\right]_y^1$$

$$=\frac{A_2^3 A_1}{6y^3}(y^3+6y^2-15y+8)$$

$$=\frac{A_2^3 A_1}{6y^3}(y-1)^2(y+8) \tag{10}$$

यदि $A_2=0$ तो हमें नुसेल्ट फिल्म संघनन

$$a_{m,N}=\frac{4K}{3}\left(\frac{A_1}{x}\right)^{1/4} \tag{11}$$

तथा

$$(N_u)_{m,N}=\frac{4}{3}\ A_1\left(\frac{x}{A_1}\right)^{1/4} \tag{12}$$

प्राप्त होता है। साथ ही

$$a_{m,N}=\frac{4K}{3}\left(\frac{A_1}{x}\right)^{1/4}=\frac{\zeta gK}{\tau}\ A_2\left(\frac{A_1}{x}\right)^{1/4}$$

$$=\frac{\zeta gK}{\tau}.\ U$$

अतः

$$\frac{a_{m,N}}{(\zeta gk/\tau)}=u \tag{13}$$

और भी

$$\frac{a_m}{a_{m,N}}=\frac{(N_u)_m}{(N_u)_{m,N}}=\frac{A_2^3}{8y^2}(y-1)^2(y+8)\left(\frac{A_1}{x}\right)^{3/4}$$

$$=\frac{u^3}{8y^3}(y-1)^2(y+8) \tag{14}$$

यदि $u=0$ अर्थात् शून्य अपरूपक प्रतिबल तो हमें नुसेल्ट फिल्म संघनन प्राप्त होता है।

$u=0$ अत: $v=1$(7) से

तथा $y=0$ (9) से

इसलिये

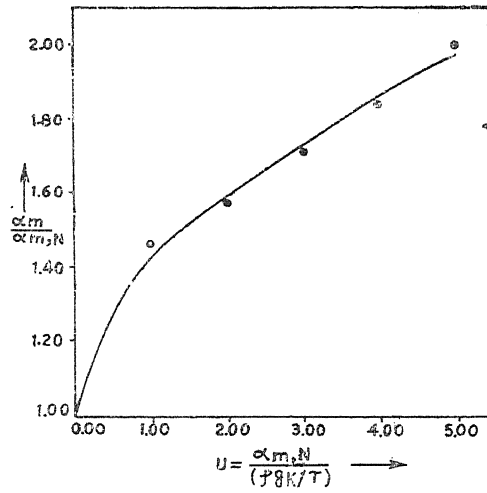
$$\frac{a_m}{a_{m,N}}=1 \text{ (14) से अर्थात् } a_m=a_{m,N}$$

$$a_{m,N}=\frac{4}{3}\left(\frac{K^3\lambda\zeta^2 g}{4\mu\triangle Tx}\right)^{1/4}$$

क्रमशः समीकरण (13) तथा (14) का उपयोग करके

$u=\frac{a_{m,N}}{(\zeta gK/\tau)}$ विपक्ष $\frac{a_m}{a_{m,N}}$ के मानों के लिये गणनायें की जाती हैं। बाष्प वेग जानने पर τ के मान को अर्थात् μ को जाना जा सकता है। $\frac{a_m}{a_{m,N}}$ का मान आलेख (चित्र 1) से प्राप्त किया जा सकता है जो ऊपर प्राप्त x के मानों के लिये है फलस्वरूप ऊष्मा स्थानान्तरण गुणांक पर बाष्प अपरूपक प्रतिबल की प्रागुक्ति की जा सकती है।

चित्र 1

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 3, July 1975, Pages 215-219

विसिया फाबा एल. (बाकला सेम) के संरंध्रों के विकास और दिग्विन्यास पर एथिल हाइड्रोजन-1-प्रोपिल फास्फोनेट का प्रभाव

नीलिमा पालीवाल तथा गणेश शंकर पालीवाल
पादप शरीर प्रयोगशाला, वनस्पति विज्ञान विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

[प्राप्त—मई 19, 1975]

सारांश

चार सप्ताह् पुराने **विसिया फाबा** एल. पौधों पर नियागरा का प्रयोग करने पर बाह्य त्वचीय कोशिकाओं और संरन्ध्रों के दिग्विन्यास और विकास पर सुस्पष्ट प्रभाव पाया गया। नियागरा-एथिल हाइड्रोजन-1-प्रोपिल फास्फोनेट 200, 1000, 2000, 10000 और 20000 ppm प्रति पंक्ति सान्द्रणों पर प्ररोह अग्रों को नष्ट करता है और बाह्यत्वचीय ऊतक में कुछ परिवर्तन करता है, यथा-द्वार कोशिकाओं का विभाजन, संरंध्र के आकार को छोटा करना जिससे संरंध्र और बाह्यत्वचीय कोशिकाएँ संख्या में बहुत बढ़ जाती हैं। इसके द्वारा वाह्यत्वचीय कोशिकाओं से मेरिस्टीमोएड का उद्गम, जुड़े हुए संरंध्र और द्वार कोशिकाओं का अपूर्ण विकास भी दिखाई पड़ता है।

Abstract

Effct of ethyl hydrogen-1-propyl phosphonate on the orientation and ontogeny of stomata and epidermal cell. *By* Neelima Paliwal and Ganesh Shankar Paliwal, Botany Department, Delhi University, Delhi.

Treatment of four week old *Vicia faba* L. plants wth Niagara induced marked variations in the orientation and ontogeny of stomata and epidermal cells. Niagara ethyl hydrogen-propy phosphonate at 200, 1000, 2000, 10000 and 20000 ppm/row of plants caused damage of the root apices and changes in the epidermal tissue such as divisions of the guard cells, reductions in the size of stomata significantly increasing the number of stomata and epidermal cells per unit area. It also causes differentiation of new meristemoids from the epidermal cells, contiguous stomata and incomplete development of guard cells.

नियागरा (एथिल हाइड्रोजन-1-प्रोपिल फास्फोनेट) द्वारा भिन्न-भिन्न प्रयोगों से ज्ञात हुआ है कि यह बहुत से शाकीय और काष्ठ पेड़ों की वृद्धि में हस्तक्षेप करता है या उसको मन्द कर देता है (डौलविट और कुमामोटो 1970)। मुख्यतया यह पर्णीय आंतरिक संरचना में परिवर्तन लाता है क्योंकि शाकीय पेड़ों की जड़ें और पत्तियाँ दोनों इसे शीघ्रता और सुगमता से शोषित कर लेती हैं। इस लेख में **विसिया फाबा** एल. (बाकला सेम) की पत्ती की वृद्धि और बाह्य त्वचा पर नियागरा के प्रभाव का वर्णन किया गया है।

प्रयोगात्मक

क्यारियों में उगाये गए **विसिया फाबा** के पौधे जब लगभग 45 से० मी० ऊंचे हो गये तो उनके ऊपर नियागरा के प्रमीय घोल का छिड़काव किया गया। इस समय प्रत्येक पौधे में केवल 6 से 8 तक पत्तियां थी। पांच भिन्न-भिन्न नियागरा सांद्रणों का प्रयोग किया गया—100, 500, 1000, 5000 और 10000 ppm (+0·02 प्रतिशत दवीन 80 जिसको सतहफैलाव के लिए प्रयोग किया गया था)। प्रत्येक छिड़काव के लिए 12 पौधे लिये गये। प्रत्येक पंक्ति में से तीन पौधों पर छिड़काव नहीं किया गया और इस प्रकार उनको नियंत्रण पौधों का नाम दिया गया।

प्रत्येक सान्द्रण से संबंधित पौधों और नियंत्रण पौधों में से छिड़काव के 10 दिन बाद पत्तियां तोड़ ली गईं और उनको फार्मैलीन-ऐसीटिक एसिड-ऐल्कोहल (*FAA*) में इकट्ठा कर लिया गया। छिड़काव के एक महीने बाद पुनः पत्तियों को तोड़ा गया। इसके बाद प्रत्येक सान्द्रण की तीन-तीन पत्तियों की नीचे की सतह की परतों को डेलाफील्ड हिमोटोक्सीलीन में रंग के ग्लिसरीन-जेली में आरोपण कर के उसका अध्ययन किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

उन पर्तों में जो कि छिड़काव के दस दिन बाद वाली पत्तियों में से ली गयी थीं देखा गया कि नियंत्रण पौधों वाली पत्तियों की अपेक्षा इनमें काफ़ी रोचक परिवर्तन आ गये हैं। नियंत्रण पौधों वाली पत्तियों में संरंध्रों का दिग्विन्यास अनियमित होता है। प्रत्येक संरन्ध्र में दो द्वार कोशिकाएं होती हैं और बाह्यत्वचीय कोशिकाओं की भित्तियां सपरिवार होती हैं (चित्र 1-A)। संरंध्र पेरीजीनस विधि से विभाजित होते हैं और उनमें सहकोशिकाएं नाम को नहीं होती हैं (असहकोशिक) जबकि उन पत्तियों में जिन पर कि नियागरा छिड़का गया था देखा गया कि संरन्ध्रों की संख्या नियंत्रण पौधों की पत्तियों की अपेक्षा काफी अधिक हो जाती है। प्रति इकाई क्षेत्र में बाह्यत्वचीय कोशिकाओं की संख्या भी काफी बढ़ जाती है (सारिणी 1)। यह भी देखा गया कि नियागरा के प्रभाव के फलस्वरूप संरन्ध्र का आकार भी घट जाता है। कुछ कोशिकाओं में भित्ति निर्माण के एक साथ दो केन्द्रकों को विभाजित होते हुए देखा गया और बाह्यत्वचीय कोशिकाओं का आकार घटने के साथ-साथ उनकी भित्तियां स्वीकार न रहकर सीधी और कोणीय हो जाती हैं। कभी-कभी सम्पूर्ण बाह्यत्वचीय कोशिका का विभाजन भी देखा गया (चित्र 1-B)। चित्र 1-C में जुड़े हुए या पंक्तिबद्ध संरन्ध्र, द्वार कोशिकाओं की अधूरी वृद्धि

और मेरिस्टीमोएड या संबंध उद्गम कोशिकाओं के अनिर्णीत समूह सुस्पष्ट हैं। चित्र 1-D में कुछ बहुत ही रोचक अनियमितताएं मिलती हैं जो कि रसायन के कारण पैदा होती हैं—जैसे कि नियमित आकार से छोटे आकार के संरंध्र, बहुत से मेरिस्टीमोएड और एक बहुत बड़े आकार का संरन्ध्र जिसके दोनों द्वार कोशिकाओं में विभाजन हो जाने के कारण एक चतुष्कोशिकीय संरचना का निर्माण करते हैं। यहां पर ऐसा संरन्ध्र भी दिखायी पड़ता है जिसकी एक द्वार कोशिका का विकास हुआ है जबकि

चित्र 1 नियागरा का संरंध्रीय दिग्विन्यास और विकास पर प्रभाव (एक महीने बाद)

A. नियंत्रण पौधों की बाह्यत्वचीय कोशिकाओं में संरंध्र की संरचना और दिग्विन्यास ×380

B. नियागरा छिड़के गये पौधे की बाह्यत्वचीय पर्त जिसमें पंक्तिबद्ध संरंध्र, मेरिस्टीमोएड और बाह्यत्वचीय कोशिकाओं का विभाजन सुस्पष्ट है ×380

C. उसी का दृश्य जिसमें द्वार कोशिकाओं का अपूर्ण विकास, बाह्यत्वचीय केंद्रक का बिना भित्ति के विभाजन, मेरिस्टीमोएड और बाह्यत्वचीय कोशिकाओं का विभाजन स्पष्ट है ×380

D. E. छिड़काव की गई पत्ती की एक पर्त का चित्र जिसमें घुमावदार और सीधी बाह्यत्वचीय कोशिका भित्तियाँ, छोटे संरंध्र, द्वार कोशिकाओं का विभाजन आदि स्पष्ट हैं ×380

दूसरी बिल्कुल गायब है। चित्र 1-E में दिखाई पड़ने वाली और अधिक असमानताएं जैसे कि पंक्तिबद्ध संरंध्र, दो विभाजित संरंध्र के समान दिखायी देने वाली संरचनाएं और विभाजित बाह्य त्वचीय कोशिकाएं एक विशेष अध्ययन की सामग्री उत्पन्न कर देती हैं। सारिणी 2 में विभिन्न प्रकार की अनियमितताओं को सांख्यिक प्रतिशतों में रखा गया है जो कि पौधों पर नियागरा के भिन्न-भिन्न सान्द्रणों के छिड़काव से उनमें पैदा होती हैं।

सारिणी 1

विसिया फाबा एल० के नियंत्रण और छिड़काव वाले पौधों में संरंध्र आवृत्ति (प्रति वर्ग मिमी)

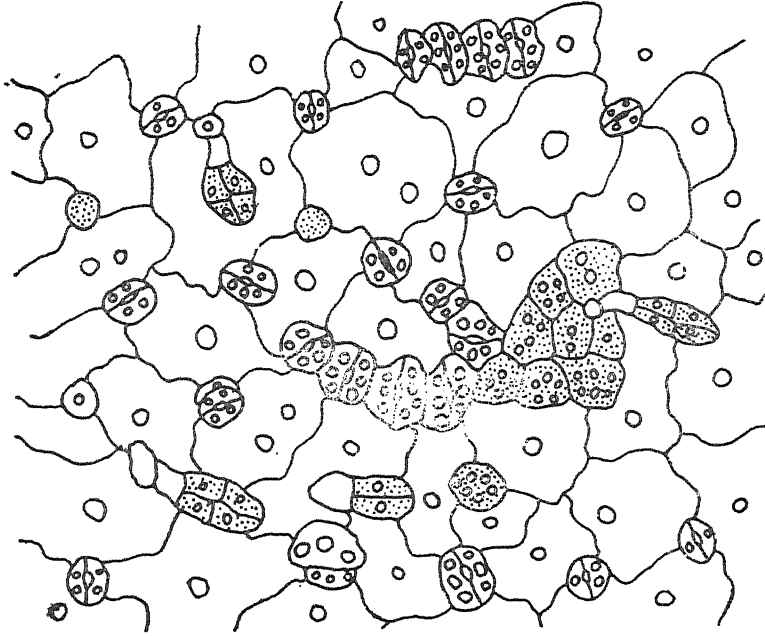
नियंत्रण पौधे	100 ppm	500 ppm	1,000 ppm	5,000 ppm	1,000 ppm
16·5	16·9	18·0	19·6	20·1	50·7

सारिणी 2

नियागरा का ***विसिया फाबा*** की पर्ण बाह्यत्वचा पर प्रभाव

लक्षणों के प्रकार %	नियागरा का सांद्रण 100 ppm	500 ppm	1,000 ppm	5,000 ppm	10,000 ppm
1. पंक्तिबद्ध संरंध्र	0	0	18·9	20·7	24·2
2. द्वार कोशिकाओं का अपूर्ण विकास	0	0	0	9·9	1·1
3. द्वार कोशिकाओं का विनाश	0	26·3	35·6	8·3	0
4. बाह्यत्वचीय कोशिकाओं का विभाजन	0	0	20·0	40·7	10·9
5. बिना भित्ति के बाह्यत्वचीय कोशिकाओं का विभाजन	0	9·6	0	0	0
6. मेरिस्टीमोएड	0	6·8	5·5	2·3	50·3
7. द्वार कोशिकाओं का विभाजन	0	0	0	0	10·1
8. साधारण संरंध्र	100	57·3	20.0	18·0	4·4

नियंत्रण पौधों और छिड़काव वाले पौधों को और अधिक उगने दिया गया और अपने परिणामों की पुष्टि के लिए 2 महीने बाद की पत्तियों का अध्ययन किया तो पाया कि इनमें अनियमितताओं की संख्या और अधिक बढ़ जाती है और पंक्तिबद्ध संरन्ध्रों में संरन्ध्रों की संख्या 6 तक पहुंच जाती है जो

कि बहुत ही उत्साहवर्धक था। चित्र 2 में इनका प्रादुर्भाव बाह्यत्वचीय कोशिकाओं या फिर द्वार कोशिका उद्गम पिंडों के लगातार विभाजन के फलस्वरूप होता है। इनमें और बाह्यत्वचीय कोशिकाओं में बहुत बड़ी संख्या में मंड कण पाये गये जो कि सम्पूर्ण सतह पर बिखरे पड़े थे।

चित्र 2 नियागरा छिड़काव के दो माह पश्चात् की **विसिया फाबा** पत्ती की बाह्यत्वचीय का एक भागः प्रोएम्ब्रियो जैसी बाह्यरचनाएँ (जिनका आधार रिक्त कोशिकाओं का है) सुस्पष्ट हैं ×380

इस प्रकार यह सिद्ध होता है कि अन्य रसायनों की तरह नियागरा भी पत्तियों पर विभिन्न प्रकार से प्रभाव डालता है। कोशिका विभाजन और उपापचयी क्रियाओं में काफी स्पष्ट वृद्धि होती है जैसा कि द्वार कोशिकाओं और बाह्यत्वचीय कोशिकाओं में बड़ी मात्रा में पाये जाने वाले मंड कणों से पता लगता है। एक और महत्वपूर्ण विषय जिस पर कि इस प्रयोगशाला में कार्य चल रहा है यह पता लगाना है कि संरन्ध्र का परिवर्तित बाह्य रूप पत्तियों में श्वसन और प्रकाश संश्लेषणीय क्रिया पर क्या प्रभाव डालता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

नियागरा रसायन केन्द्र, एफ० एम० सी० कारपोरेशन, मिडिलपोर्ट, न्यूयार्क द्वारा प्रदत्त रसायन के लिये हम उनके आभारी हैं जिसकी असीम सहायता से ही यह कार्य सम्पन्न हो सका है।

निर्देश

1. अज्ञात, टेकनिकल, रिपोर्ट, **नियागरा केमिकल डिवीजन, एफ० एम० सी० कारपोरेशन, मिडिलपोर्ट, न्यूयार्क**, 1971
2. डौलविट, एच० एच० ए० तथा कुमामोटो, **जर्न० प्लांट फिजियोला०** 1971, **46**, 786

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 3, July, 1975, Pages 221-230

दो चरों वाले H-फलन के गुणनफल सम्बन्धी समाकल

एस० के० वशिष्ट तथा एस० पी० गोयल
गरिणत विभाग, बी० वी० कालेज ग्राफ आर्ट्स तथा साइंस, वनस्थली विद्यापीठ, राजस्थान

[प्राप्त—जनवरी 21, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य ऐसे दो समाकलों का मान ज्ञात करना है जो अभी तक ज्ञात अधिकांश सामान्य समाकलों के रूप में समझे जाते हैं। प्रारम्भ में दों चरों वाले *H*-फलन के लिये श्रेणी निरूपण प्राप्त किया गया है जिसका उपयोग आगे चल कर समाकलों के मूल्याँकन में हुग्रा है। इन फलों को पुनः सार्वीकृत किया गया जिससे दो चरों वाले *H*-फलन के कई संख्या वाले गुणनफल सम्बन्धी समाकलों का मान ज्ञात किया जा सकता है।

Absract

Integrals involving the produtcts of the H-function of two variables. *By* S. K. Vasishta and S. P. Goyal, Department of Mathematics, B. V. Colleges of Arts and Science, Banasthali Vidyapith, Rajasthan.

The aim of this paper is to evaluate two integrals which are believed to be the general integrals evaluated so far. To start with, a series representation for the *H*-function of two variables has been obtained which later on being used to evaluate the integrals. These results have been further generalized leading in the evaluation of integrals involving product of any number of *H*-functions of two variables.

1. विषय प्रवेश

(अ) दो चरों वाला H-फलन:

इस शोध पत्र में ग्राये हुये दो चरों वाले *H*-फलन मित्तल तथा गुप्ता द्वारा निम्न प्रकार से परिभाषित एवं प्रस्तुत किये गये हैं:

$$H[x, y] = H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix} o, & n_1 \\ p_1, & q_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, & n_2 \\ p_2, & q_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, & n_3 \\ p_3, & q_3 \end{pmatrix}\end{matrix} \left| \begin{matrix} (a_j; \alpha_j, A_j)_{1, p_1} \\ (b_j; \beta_j, B_j)_{1, q_1} \\ (c_j, \gamma_j)_{1, p_2} \\ (d_j, \delta_j)_{1, q_2} \\ (e_j, E_j)_{1, p_3} \\ (f_j, F_j)_{1, q_3} \end{matrix} \right| \begin{matrix} x \\ \\ y \\ \\ \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t), \theta_1(s)\, \theta_2(t)\, x^s y^t\, ds\, dt \qquad \ldots \quad (1 \cdot 1)$$

जहाँ संकेत $\phi(s, t)$, $\theta_1(s)\theta_2(t)$ का प्रयोजन इसी शोधपत्र में उल्लिखित है तथा L_1 और L_2 उपयुक्त कंटूर हैं। (1·1) में समाकल के अभिसरण के तथा $H[x, y]$ के लिये एक वैश्लेषिक फलन का प्रतिनिधित्व करने के प्रतिबन्ध मित्तल तथा गुप्ता ने दिये हैं [(1972 p. 119, conditions (i) to (vi))]. इस समय शोधपत्र में यह मान लिया है कि ये प्रतिबन्ध दो चरों वाले H-फलन द्वारा तुष्ट होते हैं।

(अ) प्रयुक्त संकेत

(i) $(a_j; \alpha_j, A_j)_{1, p}$ द्वारा $(a_1; \alpha_1, A_1), \ldots, (a_p; \alpha_p, A_p)$ का बोध होता है

(ii) $(a_j, \alpha_j)_{1, p}$ द्वारा $(a_1, \alpha_1), \ldots, (a_p, \alpha_p)$ का बोध होता है

(iii) $$H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix} o, & n_1 \\ p_1, & q_1 \end{pmatrix} \\ \cdots \\ \cdots \end{matrix} \left| \begin{matrix} (a_j; \alpha_j, A_j)_{1, p_1} \\ (b_j, \beta_j, B_j)_{1, q_1} \\ \cdots \\ \cdots \end{matrix} \right| \begin{matrix} x \\ \\ y \\ \\ \end{matrix}\right]$$

द्वारा $H[x, y]$ का जो (1·1) द्वारा परिभाषित है, जब केवल $n_1, p_1, q_1 : a_i, \alpha_i, A_i; b_j, \beta_j, B_j$ $(i=1, \ldots, p_1; j=1, \ldots, q_1)$ में परिवर्तन हो।

(iv) A के द्वारा $\sum_{1}^{m} (G_j) - \sum_{m+1}^{q} (G_j) - \sum_{1}^{p} (L_j)$ का बोध होता है।

(v) $\sum_{r, s=0}^{\infty}$ द्वारा $\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty}$ का बोध होता है।

(vi) $H'[x, y]$ के द्वारा $H\left[\begin{array}{l|l|l} \begin{pmatrix} o, o \\ p_1', q_1' \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (a_j'; \alpha_j', A_j')_{1, p_1'} \\ (b_j'; \beta_j', B_j')_{1, q_1'} \end{array} & x \\ \begin{pmatrix} m_2', n_2' \\ p_2', q_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (c_j', \gamma_j')_{1, p_2'} \\ (d_j', \delta_j')_{1, q_2'} \end{array} & y \\ \begin{pmatrix} m_3', n'_3 \\ p_3', q_3' \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (e_j', E_j')_{1, p_3'} \\ (f_j, F_j')_{1, q_3'} \end{array} & \end{array}\right]$

(vii) $H^*[x, y]$ के द्वारा $H\left[\begin{array}{l|l|l} \begin{pmatrix} o, o \\ p_1', q_1' \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (a_j'; \alpha_j', A_j')_{1, p_1'} \\ (b_j'; \beta_j', B_j')_{1, q_1'} \end{array} & x \\ \begin{pmatrix} m_2'+1, n_2' \\ p_2', q_2'+1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (c_j', \gamma_j')_{1, p_2'} \\ (d_j, \delta), (d_j', \delta_j')_{1, q_2'} \end{array} & y \\ \begin{pmatrix} m_3'+1, n_3' \\ p_3', q_3'+1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (e_j', E_j')_{1, p_3'} \\ (f, F), (f_j', F_j')_{1, q_3'} \end{array} & \end{array}\right]$

(इ) वांछित फल

(i) $$\int_0^\infty \int_0^\infty x^{d-1} y^{f-1} e^{-x} e^{-y} H' [\alpha x^{-\delta}, y\beta^{-F}]\, dx\, dy = H^* [\alpha, \beta]. \quad \ldots \quad (1\cdot2)$$

बशर्ते कि $\delta>0, F>0, Re\left(d-\frac{\delta(c_i'-1)}{y_i'}\right)>0, Re\left(f-F\frac{(e_j'-1)}{E_j'}\right)>0$

$(i=1, \ldots, n_2'; j=1, \ldots, n_3')$.

उपर्युक्त परिणामों को सरलता से सिद्ध किया जा सकता है यदि पहले (1·2) के बाम पक्ष में आये हुये दो चरों वाले H-फलन को (1·1) की भांति मेलिन-बार्नीज प्रकर के कंटूर समाकल के पदों में व्यक्त किया जाय और फिर समाकलन का क्रम बदल करके गामा-फलन की परिभाषा का उपयोग x तथा y समाकलों के मान ज्ञात करने और अन्त में इस प्रकर से प्राप्त परिणाम को (1·1) की सहायता से विवेचित किया जावे।

(ii) $$\int_0^\infty x^\alpha (1+tx)^{-\beta} H_{p,q}^{m,o}\left[cx^{w_1}(1+tx)^{-w_2}\left|\begin{array}{l}(1_j, L_j)_{1,p}\\(g_j, G_j)_{1,q}\end{array}\right.\right] \times H[yx^{\lambda_1}(1+tx)^{-\lambda_2}, zx^{\mu_1}(1+tx)^{-\mu_2}]\, dx$$

$$= t^{-\alpha-1} \sum_{h=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{m} \Gamma(g_j - G_j\eta_h)(ct^{-w_1\eta_h})\,(-1)^\nu}{\prod\limits_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-g_j+G_j\eta_h) \prod\limits_{j=1}^{p} \Gamma(1_j - L_j\eta_h)\, \nu!\, G_h}$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\binom{o,\ n_1+2}{p_1+2,\ p_1+1}\\ \cdots \\ \cdots\end{matrix}\left|\begin{matrix}(-a-w_1\eta_h;\ \lambda_1,\ \mu_1),\ (2+a-\beta+\overline{w_1-w_2\eta_h};\ \lambda_2-\lambda_1,\ \mu_2-\mu_1),\ (a_j;\ \alpha_j,\ A_j)_{1,\ p_1}\\ (b_j;\ \beta_j,\ B_j)_{1,\ q_1},\ (1-\beta-w_2\eta_h;\ \lambda_2\ \mu_2)\\ \cdots \\ \cdots\end{matrix}\right|\begin{matrix} yt^{-\lambda_1}\\ zt^{-\mu_1}\end{matrix}\right] \quad \ldots \quad (1\cdot2)$$

जहाँ $\eta_h \dfrac{g_h+v}{G_h}$ और समाकल निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

(i) $A>0$, $|\arg c|<\frac{1}{2}A\pi$. (ii) $t>0$, $0<w_1<w_2$, $0<\lambda_1<\lambda_2$, $0<\mu,\mu_1<\mu_2$ $Re\,(\beta)>Re\,(\alpha)>0$.

(iii) $Re\left(a+w_1\dfrac{g_i}{G_i}+\lambda_1\dfrac{d_j}{\delta_j}+\mu_1\dfrac{f_k}{F_k}+1\right)>0(i=1,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ \ldots,\ m_2;\ k=1,\ \ldots,\ m_3)$

(iv) (1·3) के दाहिने पक्ष में दी हुई श्रेण पूर्णतया अभिसारी है।

उर्युक्त समाकल हाल ही में कौल द्वारा दिया गया है।

2. दो चरों वाले H-फलन के लिये श्रेणी निरूपण

$$H^*[\alpha,\ \beta]=\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}(\alpha)^{\rho r}(\beta)^{\sigma s}}{r!\ s!\ \delta\ .\ F}\ \psi(\rho_r,\ \sigma_s) \quad \ldots \quad (2\cdot1)$$

जहाँ $\rho_r=\dfrac{d+r}{\delta}$, $\sigma_s=\dfrac{f+s}{F}$ तथा $\psi(\rho_r,\ \sigma_s)=\psi_1(\rho_r,\ \sigma_s)\phi_2(\rho_r)\phi_3(\sigma_s)$

जिससे कि

$$\psi_1(\rho_r,\ \sigma_s)=\frac{1}{\prod_{j=1}^{p_1'}\Gamma(a_j'-\alpha_j'\rho_r-A_j'\sigma_s)\prod_{j=1}^{q_1'}\Gamma(1-b_j'+\beta_j'\rho_r+B_j'\sigma_s)},$$

$$\phi_2(\rho_r)=\frac{\prod_{j=1}^{m_2'}\Gamma(d_j'-\delta_j'\rho_r)\prod_{j=1}^{n_2'}\Gamma(1-c_j'+\gamma_j'\rho_r)}{\prod_{j=m_2'+1}^{q_2'}\Gamma(1-d_j'+\delta_j'\rho_r)\prod_{j=n_2'+1}^{p_2'}\Gamma(c_j'-\gamma_j'\rho_r)},$$

$$\phi_3(\sigma_s)=\frac{\prod_{j=1}^{m_3'}\Gamma(f_j'-F_j'\sigma_s)\prod_{j=1}^{n_3'}\Gamma(1-e_j'+E_j'\sigma_s)}{\prod_{j=m_3'+1}^{q_3'}\Gamma(1-f_j'+F_j'\sigma_s)\prod_{j=n_3'+1}^{p_3'}\Gamma(e_j'-E_j'\sigma_s)},$$

(2·1) के वैधता के प्रतिबन्ध निम्नवत् हैं

(i) $\delta>0, F>0, Re\left(d-\frac{\delta(c_i'-1)}{\gamma_i'}\right)>0, Re\left(f-F\frac{(e_j'-1)}{E_j'}\right)>0(i=1, ..., n_2'; j=1, ..., n_3')$

$$Re\left(d-\delta\frac{d_i'}{\delta_i'}\right)<0, Re\left(f-F\frac{f_j'}{F_j'}\right)<0(i=1, ..., m_2'; j=1, ..., m_3').$$

(ii) (2·1) के दाहिने पक्ष की श्रेणी पूर्णतया अभिसारी है।

उपपत्ति

(1·2) के बाँये पक्ष में $-x$ तथा $-y$ को x तथा y के घातों में प्रसारित करने तथा समाकलन और संकलन के क्रम को बदलने पर

$$\sum_{r=,s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{r!\,s!} \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x^{d+r-1} y^{f+s-1} H'[\alpha x^{-\delta}, \beta y^{-F}]\, dx\, dy$$

$\alpha x^{-\delta}=u$, $\beta y^{-F}=v$ रखने पर तथा रीड के प्रमेय I (1944, p. 566) का सम्प्रयोग x तथा y समाकलों का मान निकालने के लिये करने और उसमें उचित प्रतिस्थापन करने पर हमें (2·1) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है।

यदि हम $p_1'=q_1'=m_3=n_3'=p_3'=q_3'=0, f=0, F=1$ रखें और (2·1) में $\beta\to 0$ होने दें तो हमें मुखर्जी तथा प्रसाद द्वारा प्राप्त फल (1971, p. 6) मिलेगा।

3. **प्रथम समाकल**

$$\int_0^{\infty} x^{k_1}(1+tx)^{-k_2} H^*\left[ax^{u_1}(1+tx)^{-u_2}, bx^{v_1}(1+tx)^{-v_2}\right] H_{p,q}^{m,o}\left[cx^{w_1}(1+tx)^{-w_2}\middle|\begin{matrix}(l_j, L_j)_{1,p}\\(g_j\, G_j)_{1,q}\end{matrix}\right] \times H\,[yx^{\lambda_1}(1+tx)^{-\lambda_2}, zx^{\mu_1}(1+tx)^{-\mu_2}]\, dx$$

$$=\sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}(a)^{\rho r}(b)^{\sigma s}}{r!\,s!\,\delta.F}\,\psi(\rho_r,\sigma_s)\sum_{h=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{m}\Gamma(g_j-G_j\eta_h)}{\sum\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-g_j+G_j\eta_h)}$$

$$\times\frac{(t)^{-(k_1+u_1\rho_r+v_1\sigma_s+w_1\eta_h+1)}(-1)^{\nu}(c)^{\eta_h}}{\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma(l_j-L_j\eta_h)\,\nu!\,G_h} H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}o, n_1+2\\ p_1+2, q_1+1\end{pmatrix} & \begin{matrix}L\\M\end{matrix} & \begin{matrix}yt^{-\lambda_1}\\ zt^{-\mu_1}\end{matrix}\\ \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \end{matrix}\right] \quad . \quad . \quad (3·1)$$

जहाँ $L=(-k_i-u_1\rho_r-v_1\sigma_s-w_1\eta_h;\ \lambda_1,\ \mu_1),\ (2+k_1-k_2+\overline{u_1-u_2}\rho_r+\overline{v_1-v_2}\sigma_s+\overline{w_1-w_2}\eta_h;$
$\times\lambda_2-\lambda_1,\ \mu_2-\mu_1),\ (a_j;\ a_j,\ A_j)_{1,\ p_1};$

$$M=(b_j;\ \beta_j,\ B_j)_{1,\ q_1},\ (1-k_2-u_2\rho_r-v_2\sigma_s-w_2\eta_h;\ \lambda_2,\ \mu_2);$$

$$\eta_h=\frac{g_h+v}{G_h}\ (h=1,\ \ldots,\ m),\ \rho_r=\frac{d+r}{\delta},\ \sigma_s=\frac{f+s}{F}.$$

निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत (3·1) वैध होगा:

(i) $0<u_1<u_2,\ 0<v_1<v_2,\ 0<\lambda_1<\lambda_2,\ 0<\mu_1<\mu_2,\ 0<w_1<w_2,\ t>0,\ Re\ (k_2)>Re\ (k_1)>0.$

(ii) $Re\left(k_1+\mu_1\frac{d}{\delta}+v_1\frac{f}{F}+w_1\frac{g_i}{G_i}+\lambda_1\frac{d_j}{\delta_j}+\mu_1\frac{f_j'}{F_j'}+1\right)>0(i=1,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ \ldots,\ m_2$
$j'=1,\ \ldots,\ m_3),\ Re\ (k_1+u_1(d_{i'}/\delta_{i'})+v_1(f_{j'}/F_{j'})+w_1(g_k/G_k)+\lambda_1(d_{i'}/\delta_{i'})$
$+\mu_1(f_{j'}/F_{j'})+1)+1)>0(i=1,\ \ldots,\ m_{2'};\ j=1,\ \ldots,\ m_{3'};\ k=1,\ \ldots,\ m;\ i'=1,\ \ldots,\ m_2;$
$j'=1,\ \ldots,\ m_3).$

(iii) $A>0,\ |\arg c|<\frac{1}{2}A\pi.$

(iv) (3·1) के दाहिने पक्ष की श्रेणी पूर्णतया अभिसारी है।

उपपत्ति

(3·1) के वाम पक्ष में (2·1) द्वारा दिये गये श्रेणी प्रसार का उपयोग करने पर तथा समाकलन और संकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर (जो (2·1) में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है)

$$\frac{1}{\delta F}\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}(a)^{\rho_r}(b)^{\sigma_s}}{r!\ \ s!}\ \psi(\rho_r,\ \sigma_s)\int_0^{\infty}\frac{(x)^{k_1+u_1\rho_r+v_1\sigma_s}}{(1+tx)^{k_2+u_2\rho_r+v_2\sigma_s}}$$

$$\times H_{p,q}^{m,0}\left[cx^{w_1}(1+tx)^{-w_2}\left|\begin{matrix}(1_j,\ L_j)_{1,\ p}\\(g_j,\ G_j)_{1,\ q}\end{matrix}\right.\right]H\left[yx^{\lambda_1}(1+tx)^{-\lambda_2},\ zx^{\mu_1}(1+tx)^{-\mu_2}\right]dx$$

1·3) की सहायता से x समाकल का मान निकालने पर हमें (3·1) का दाहिने पक्ष प्राप्त होता है।

(3·1) की विशिष्ट दशायें

1. $t=1$ मानने पर, x के स्थान पर $\frac{x}{u-x}$ रखने पर और k_2 को k_1+k_2+2 के द्वारा, u_2 को u_1+v_2 द्वारा, v_2 को v_1+v_2 द्वारा, w_2 को w_1+w_2 द्वारा, λ_2 को $\lambda_1+\lambda_2$ द्वारा, μ_2 को $\mu_1+\mu_2$, द्वारा तथा इसी प्रकार au^{-u_2} को a द्वारा, bu^{-v_2} को b द्वारा, $yu^{-\lambda_2}$ को y द्वारा, $zu^{-\mu_2}$ को z द्वारा, cu^{-w_2} को c द्वारा प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नांकित समाकल प्राप्त होता है जो नवीन प्रतीत होता है।

$$\int_0^u x^{k_1}(u-x)^{k_2} H^*\left[ax^{u_1}(u-x)^{u_2}, bx^{v_1}(u-x)^{v_2}\right] H_{p,q}^{m,o}\left[cx^{w_1}(u-x)^{w_2}\left|\begin{matrix}(1_j, L_j)_{1,p}\\(g_j, G_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]$$
$$\times H\left[yx^{\lambda_1}(u-x)^{\lambda_2}, zx^{\mu_1}(u-x)^{\mu_2}\right] dx$$

$$=(u)^{k_1+k_2+1}\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}(a)^{\rho r}(b)^{\sigma s}}{r!\,s!\,\delta F}\psi(\rho_r, \sigma_s)\sum_{h=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}(c)^{\eta h}}{\nu!\,G_h}$$

$$\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq h}}^{m}\Gamma(g_j-G_j\eta_h)(u)^{(u_1+u_2)\rho r+(v_1+v_2)\sigma s+(w_1+w_2)\eta h}}{\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-g_j+G_j\eta_h)\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma(1_j-L_j\eta_h)} H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}o, n_1+2\\p_1+2, q_1\end{pmatrix}\\ \cdots\\ \cdots\end{matrix}\left|\begin{matrix}L'\\M'\\ \cdots\\ \cdots\end{matrix}\right|\begin{matrix}yu^{\lambda_1+\lambda_2}\\zu^{\mu_1+\mu_2}\end{matrix}\right] \qquad (3\cdot2)$$

जहाँ (i) L' $(-k_1-u_1\rho_r-v_1\sigma_s-w_1\eta_h;\ \lambda_1, \mu_1), (-k_2-u_2\rho_r-v_2\sigma_s-w_2\eta_h;\ \lambda_2, \mu_2),$ $(a_j;\ \alpha_j, A_j)_{1, p_1}$

के लिये

(ii) M' $(b_j;\ \beta_j, B_j)_{1, q_1}, (-1-k_1-k_2-\overline{u_1+u_2}\rho_r-\overline{v_1+v_2}\sigma_s-\overline{w_1+w_2}\eta_h;\ \lambda_1+\lambda_2, \mu_1+\mu_2).$

के लिये आया है ।

समाकल (3·2) निम्नांकित प्रतिबन्ध-समुच्चय के अन्तर्गत वैध है:

(i) $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1$ तथा μ_2 सभी धन संख्यायें हैं ।

पुनश्च: $Re\ (k_1)>0,\ Re\ (k_2)>0$

(ii) $Re\ (k_1+u_1(d/\delta)+v_1(f/F)+w_1(g_i/G_i)+\lambda_1(d_j/\delta_j)+\mu_1(f_{j'}/F_{j'})+1)>0$

$(1=1, 2;\ i=1, \ldots, m;\ j=1, \ldots, m_2;\ j'=1, \ldots, m_3).$

$Re\ (k_1+u_1(d_i'/\delta_i')+v_1(f_j'/F_j')+w_1(g_k/G_k)+\lambda_1(d_{i'}/\delta_{i'})+\mu_1(f_{j'}/F_j)+1)>0$

$(1=1, 2;\ i=1, \ldots, m_2';\ j=1, \ldots, m_3';\ k=1, \ldots, m;\ i'=1, \ldots, m_2;\ j'=1, \ldots, m_3).$

(iii) $A>0,\ |\arg c|<\frac{1}{2}A\pi.$

(iv) (3·2) के दाहिने पक्ष की श्रेणी पूर्णतया अभिसारी है ।

(3·1) में $m=q=1, p=0, w_1=w_2=1, g_1=0, G_1=1$ रखने पर तथा $c\to 0$, होने देने पर

$$\int_0^{\infty} x^{k_1}(1+tx)^{-k_2} H^*\left[ax^{u_1}(1+tx)^{-u_2}, bx^{v_1}(1+tx)^{-v_2}\right]$$
$$\times H\left[yx^{\lambda_1}(1+tx)^{-\lambda_2}, zx^{\mu_1}(1+tx)^{-\mu_2}\right] dx$$

$$=\sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}(a)^{\rho r}(b)^{\sigma s}}{r!\,s!\,\delta F}\,\psi(\rho_r,\sigma_s)\,t^{-(k_1+v_1\rho r+\sigma s+1)}\,H\left[\begin{pmatrix}o,\ n_1+2\\ p_1+2,\ q_1+1\end{pmatrix}\left|\begin{matrix}L''\\ M''\\ \cdots\\ \cdots\end{matrix}\right|\begin{matrix}yt^{-\lambda_1}\\ zt^{-\mu_1}\end{matrix}\right] \quad \ldots (3{\cdot}3)$$

जहाँ L'' $(-k_1-u_1\rho_r-v_1\sigma_s;\ \lambda_1,\ \mu_1),\ (2+k_1+k_2+\overline{u_1-u_2}\rho_r-\overline{v_1-v_2}\sigma_s;\ \lambda_2-\lambda_1,\ \mu_2-\mu_1)$ $(a_j;\ \alpha_j,\ A_j)_{1,\ p_1}$ के लिये

M'' $(b_j;\ \beta_j,\ B_j)_{1,\ q_1},\ (1-k_2-u_2\rho_r-v_2\sigma_s;\ \lambda_2,\ \mu_2)$ के लिये

वैधता के प्रतिबन्ध (3·1) में सरलता से प्राप्त हो जाते हैं ।

यह ध्यान देने योग्य है कि यद्यपि (3·3) का समाकल कौल द्वारा दिये गये समाकल (1973 p. 366 eq. 2·1) से अधिक सामान्य है किन्तु फिर भी दाहिना पक्ष उनके परिणाम से कहीं अधिक सरल है । चाहें तो हम इस समाकल का मान (3·3) में $n_2'=0,\ m_3'=1$ रख कर प्राप्त कर सकते हैं किन्तु इस प्रकार से प्राप्त परिणाम कुछ भिन्न होगा ।

यदि हम (3·1) में $b\to 0$ मानते हुये $m_3'=n_3'=p_1'=q_1'=p_3'=q_3'=0,\ f=0,\ F=v_1=v_2=1$ रखें तो हमें गोयल तथा माथुर का फल (eq. 2·1) प्राप्त होता है औ बाद में गुप्ता तथा ओल्खा के फल (1969, p. 207) में परिणत हो जाता है । यही नहीं, कौल (1973, p. 370), गोयल (1971, p. 222), सेवरिया (1969, p. 21) के फल (3·1) की विशिष्ट दशायें हैं ।

4. द्वितीय समाकल

$$\int_3^{\infty} x^{k-1}\,H^*[ax^{\lambda},\ bx^{\mu}]\,H[yx^{u},\ zx^{v}]\,H_{p,q}^{m,o}\left[cx^{w}\left|\begin{matrix}(l_j,\ L_j)_{1,\ p}\\ (g_j,\ G_j)_{1,\ q}\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\frac{(C)^{-k/w}}{w}\sum_{r,s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+s}(ac^{-\lambda/w})^{\rho r}(bc^{-\mu/w})^{\sigma s}}{r!\,s!\,\delta F}\,\psi(\rho_r,\ \sigma_s)\ H\left[\begin{pmatrix}o,\ n_1+m\\ p_1+q,\ q_1+p\end{pmatrix}\left|\begin{matrix}P\\ Q\\ \cdots\\ \cdots\end{matrix}\right|\begin{matrix}yc^{-u/w}\\ zc^{-v/w}\end{matrix}\right] \quad \ldots (4{\cdot}1)$$

जहाँ $P(a_j;\ \alpha_j,\ A_j)_{1,\ n_1},\ \left(1-g_j-\overline{\frac{k}{w}+\frac{\lambda}{w}\rho_r+\frac{\mu}{w}\sigma_s}G_j;\ \frac{v}{w}G_j,\ \frac{v}{w}G_j\right)_{1,\ q},\ (a_j;\ \alpha_j,\ A_j)_{n_1+1,\ p_1}$

के लिये

तथा $(b_j; \beta_j, B_j)_{1, q_1}, \left(1-1_j-\frac{k}{w}+\frac{\lambda}{w}\rho_r+\frac{\mu}{w}\sigma_s L_j; \frac{u}{w}L_j, \frac{v}{w}L_j\right)_{1, p}$

के लिये प्रयुक्त हैं ।

समाकल (4·1) निम्नांकित प्रतिबन्ध समुच्चय के लिये वैध हैं:

(i) $A>0$, $|\arg c|<\frac{1}{2}A\pi$, λ, μ, u, v, w घन संख्यायें हैं ।

(ii) $Re\,(k)>0$, $Re\,(k+\lambda(d/\delta)+\mu(f/F)+u(d_i/\delta_i)+v(f_{i'}/F_{i'})+w(g_j/G_j))>0$

$(i=1, ..., m_2;\ i'=1, ..., m_3; j=1, ..., m)$, $Re\,(k+\lambda(d_{i'}/\delta_{i'})\mu(f_{ji}/F_{j'})+u(d_{i'}/\delta_{i'})$

$+v(f_{j'}/F_{j'})+w(g_1/G_1))>0(i=1, ..., m_2'; j=1, ..., m_3'; i'=1, ..., m_2; 1=1, ..., m;$

$j'=1, ..., m_2)$.

(iii) (4·1) के दाहिने पक्ष की श्रेणी पूर्णतया अभिसारी है ।

उपपत्ति

(4·1) की स्थापना के लिये हम $H^*(ax^\mu, bx^\mu)$ को (2·1) की सहायता से द्विगुण श्रेणी के पदों में व्यक्त करते हैं और समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलते हैं । x-समाकल का मान गोयल तथा माथुर (समीकरण 2·3) द्वारा निकालने पर अभीष्ट फल प्राप्त होता है ।

यदि हम (4.1) में $m_0'=n_3'=p_0'=q_3'=0, f=0, F=1, w=1$ रखें और $b\to 0$ होने दें तो हमें हाल ही में गोयल तथा माथुर द्वारा दिया गया (eq. 2·2) ज्ञात फलन प्राप्त होगा जो स्वयं कई ज्ञात समाकलों का सार्वीकरण है[3,6] ।

यह ध्यान देने योग्य है कि (3·1) तथा (4·1) द्वारा व्यक्त समाकलों को और भी आगे सार्वीकृत किया जा सकता हैं इसमें $H^*(x, y)$ प्राकर के दो चरों वाले H-फलन के परिमित संख्या वाले गुणनफलन को प्रविष्ट करके प्राप्त किया जा सकता है । इस प्रकार हम निम्नलिखित प्रकार के समाकलों का मान ज्ञात कर सकते हैं:

$$\int_0^\infty x^{k_1}(1+tx)^{-k_2} \prod_{i=1}^{m} H\left[\begin{matrix} \binom{o,\ o}{p_1 i,\ q_1^i} \\ \binom{m_2^i+1,\ n_2^i}{p_2^i,\ q_2^i+1} \\ \binom{m_3^i+1,\ n_3^i}{p_3^i,\ q_3^i+1} \end{matrix}\left|\begin{matrix} (a_j^i; \alpha_j^i, A_j^i)_{1, p_1^i} \\ (b_j^i; \beta_j^i, B_j^i)_{1, q_1^i} \\ (c_j^i, \gamma_j^i)_{1, p_2^i} \\ (d^i, \delta^i), (d_j^i, \delta_j^i)_{1, q_2^i} \\ (e_j^i, E_j^i)_{1, p_3^i} \\ (f^i, F^i), (f_j^i, F_j^i)_{1, q_3^i} \end{matrix}\right|\begin{matrix} (1+tx)^{-u_2^i}ax^{u_1^i} \\ bx^{v_1^i}(1+tx)^{-v_2^i} \end{matrix}\right]$$

$$\times H_{p,q}^{m,o}\left[cx^{w_1}(1+tx)^{-w_2}\left|\begin{matrix}(1_j, L_j)_{1, p} \\ (g_j, G_j)_{1, q}\end{matrix}\right.\right] H\left[yx^{\lambda_1}(1+tx)^{-\lambda_2}, zx^{\mu_1}(1+tx)^{-\mu_2}\right] dx$$

$$\int_3^\infty x^{k-1} \prod_{i=1}^{n} H \left[\begin{matrix} \binom{o,\, o}{p_1{}^i,\, q_1{}^i} \\ \binom{m_2{}^i+1,\, n_2{}^i}{p_2{}^i,\, q_2{}^i+1} \\ \binom{m_3{}^i+1,\, n_3{}^i}{p_3{}^i,\, q_3{}^i+1} \end{matrix} \left| \begin{matrix} (a_j{}^i;\, \alpha_j{}^i,\, A_j{}^i)_{1,\, p_1{}^i} \\ (b_j{}^i;\, \beta_j{}^i,\, B_j{}^i)_{1,\, q_1{}^i} \\ (c_j{}^i,\, \gamma_j{}^i)_{1,\, p_2{}^i} \\ (d^i,\, \delta^i),\, (d_j{}^i,\, \delta_j{}^i)_{1,\, q_2{}^i} \\ (e_j{}^i,\, E_j{}^i)_{1,\, p_3{}^i} \\ (f^i,\, F^i),\, (f_j{}^i,\, F_j{}^i)_{1,\, q_3{}^i} \end{matrix} \right| \begin{matrix} ax^{u_1{}^i} \\ bx^{v_1{}^i} \end{matrix} \right]$$

$$\times H_{p,q}^{m,o}]yx^u,\, zx^v]\;\; H_{p,q}^{m,o}\left[cx^w \left| \begin{matrix} (1_j,\, L_j)_{1,\, p} \\ (g_j,\, G_j)_{1,\, q} \end{matrix} \right.\right] dx$$

उपर्युक्त प्रकार के समाकलों के मान ज्ञात करने के लिये समाकल्य के प्रत्येक H^* को (2·1) की सहायता से द्विगुण श्रेणी के पदों में व्यक्त करते हैं, समाकलन तथा संकलन का क्रम बदल देते हैं और फिर या तो (1·3) की सहायता से x-समाकल का मान ज्ञात करते हैं या गोयल तथा माथुर के फल (eq. (2·3)) का सम्प्रयोग करते हैं ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक द्वय राजस्थान विश्वविद्यालय के गणित विभाग के रीडर डा० के० सी० शर्मा के अत्यन्त आभारी हैं जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में अपने सुझावों से प्रोत्साहित किया ।

निर्देश

1. गोयल, एस० पी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइं० इंडिया**, 1970, **40A**, 219-28
2. गोयल, एस० पी० तथा माथुर, एम० एल०, **इंडिया जर्न० प्योर एण्ड ऐप्ला० मैथ०** (प्रेस में)
3. गुप्ता, एस० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइं० इंडिया**, 1969, **39A**, 192-203
4. गुप्ता, सी० के० तथा ओल्खा, जी० एस०, Apartado de la Revista y Fisica theorica, Argentina, 1969, **15(A)**, 205-12.
5. कौल, सी० एल०, **इंडियन जर्न० प्योर एण्ड ऐप्ला० मैथ०**, 1973, **4**, 364-73
6. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **प्रोसी० इंडियन एके० साइं०**, 1972, **75A**, 117-23
7. मुखर्जी, एस० एन० तथा प्रसाद, वाई० एन०, **मैथ० एजु०**, 1971, **5**, 5-12
8. रीड, आई० एस०, Duke Math. Journal 1944, **11**, 565-72
9. सेवारिया, के० एस०, Apartado de la Revista Math. y Fisica theorica, Argentina, 1969, **19(A)**, 21-25

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 3, July, 1975, Pages, 231-237

दो चरों में हाइपरज्यामितीय बहुपदों के जनक फलन के रूप में सार्वीकृत लारिसेल्ला फलन

जी० बी० महाजन
गणित विभाग, शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ

[प्राप्त—जनवरी 13, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य दो चरों में हाइपरज्यामितीय बहुपदों तथा कई चरों में हाइपरज्यामितीय श्रेणी के लिये द्विरेखीय जनक फलन प्राप्त करना है। चूँकि हमारे सूत्र में सन्निहित कई चरों वाले सार्वीकृत लारिसेल्ला फलन अत्यन्त सामान्य प्रकृति के हैं अतः यहाँ पर सिद्ध होने वाले परिणामों से कई विशिष्ट रोचक दशायें प्राप्त होती हैं।

Abstract

Generalized Lauricella functions as generating functions of the hypergeometric polynomials in two variables. *By* G. B. Mahajan, Department of Mathematics, Science College, Rewa.

The object of this paper is to obtain some bilinear generating functions for hypergeometric polynomials in two variables and hypergeometric series in several variables. As the generalized Lauricella function of several variables, involved in our formula, is of very general nature, the results proved here provide a number of particular interesting cases.

हाल ही में श्रीवास्तव तथा डूस्ट [6, p. 454 (4·1)] ने कई चरों वाले सार्वीकृत लारिसेल्ला फलनों को निम्नांकित समिका के द्वारा परिभाषित किया है

$$F\left[\begin{matrix}(a_A) : (b^{(1)}_{B_1}); \ldots; (b^{(r)}_{B_r}); \\ (c_C) : (d^{(1)}_{D_1}; \ldots; (d^{(r)}_{D_r}) ;\end{matrix} \; z_1, \ldots, z_r\right] \tag{1·1}$$

$$= \sum_{m_1, \ldots, m_r=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{A} (a_i, m_1+\ldots+m_r) \prod_{i=1}^{B1} (b_i^{(1)}, m_1)\ldots \prod_{i=1}^{Br} (b_i^{(r)}, m_r)}{\prod_{i=1}^{C} (c_i, m_1+\ldots+m_r) \prod_{i=1}^{D1} (d_i^{(1)}, m_1) \ldots \prod_{i=1}^{Dr} (d_i^{(r)}, m_r)} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{z_r^{m_r}}{m_r!},$$

जहाँ $A+B_i \leqq C+D_i$, या यदि

$A+B_i=C+D_i+1$, तो $|z_i|$, $i=1, \ldots, r$;

उपयुक्त रीति से प्रतिबन्धित हैं।

पादाक्षर r के द्वारा चरों की संख्या व्यक्त की गई है। सुविधा की दृष्टि से (a_A) से A प्राचलों का अनुक्रम $a_1, \ldots, a_A$; $(b_{B_k}^{(j)})$ से B_k प्राचालों का $b_1^{(j)}, \ldots, b_{B_k}^{(j)}$; और इसी प्रकार के तर्क द्वारा (c_C) तथा $(d_{D_k}^{(j)})$; $j, k=1, \ldots, r$. (:) तथा (;) द्वारा $(a, m_1+\ldots+m_r)$ तथा $(\beta_1, m_1), \ldots, (\beta_r, m_r)$ रूप पृथक्कृत हुये हैं। रिक्त गुणन फल को इकाई माना गया है और इसी तर्क को शोधपत्र में बनाये रखा जावेगा।

$(a. m)$ पोरवैमर संकेत है जिसे

$$(a, m)=\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)}\begin{cases}=1, & \text{यदि } m=0,\\ =a(a+1), \ldots(a+m-1), & \text{यदि } m=1, 2, \ldots .\end{cases} \qquad (1\cdot2)$$

के द्वारा परिभाषित किया जाता है।

2. निम्नांकित पर विचार कीजिये

$$(1-t)^{-\lambda} \; F^{(r+2)} \left[\begin{matrix}\lambda : (b_{B_1}^{(1)}); \ldots; (b_{B_{r+2}}^{(r+2)});\\ -: (d_{D_1}^{(1)}); \ldots; (d_{D_{r+2}}^{(r+2)});\end{matrix} \frac{z_1}{1-t}, \ldots, \frac{z_r}{1-t}, \frac{-xt}{1-t}, \frac{-yt}{1-t}\right]$$

$$= \sum_{m_1, \ldots, m_r=0}^{\infty} \frac{(\lambda, M) \prod_{i=1}^{B1} (b_i^{(1)}, m_1)\ldots \prod_{i=1}^{Br} (b_i^{(r)}, m_r)}{\prod_{i=1}^{D1} (d_i^{(1)}, m_1)\ldots \prod_{i=1}^{Dr} (d_i^{(r)}, m_r)} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{z_r^{m_r}}{m_r!}$$

$$\times(1-t)^{-(\lambda+M)} \sum_{m_{r+1}=0}^{\infty} \prod_{m_{r+2}}^{\infty} \frac{(\lambda+M, m_{r+1}+m_{r+2}) \prod_{i=1}^{Br+1} (b_i^{(r+1)}, m_{r+1}) \prod_{i=1}^{Br+2} (b_i^{(r+2)}, m_{r+2})}{m_{r+1}!\, m_{r+2}! \prod_{i=1}^{Dr+1} (d_i^{(r+1)}, m_{r+1}) \prod_{i=1}^{Dr+2} (d_i^{(r+2)}, m_{r+2})}$$

$$\left(\frac{-xt}{1-t}\right)^{m_{r+1}} \left(\frac{-yt}{1-t}\right)^{m_{r+2}},$$

जहाँ सुविधा के लिये M से $m_1+\ldots+m_r$ को बोध होता है । अन्तिम पंक्ति के व्यंजक के लिये जो

$$(1-t)^{-(\lambda+M)}\ F^{(2)}\left[\begin{matrix}\lambda+M:\ (b^{(r+1)}_{B_{r+1}});\ (b^{(r+2)}_{B_{r+2}});\\ -:(d^{(r+1)}_{D_{r+1}});\ (d^{(r+2)}_{D_{r+2}});\end{matrix}\ \frac{-xt}{1-t},\frac{-yt}{1-t}\right],$$

के समतुल्य है हम निम्नांकित फल का उपयोग करेंगे जो श्रीवास्तव [5. p. 87 (4·9)] के कारण है:

$$(1-t)^{-\lambda}\ F^{(2)}\left[\begin{matrix}\lambda:(b_B);\ (c_C);\\ -:(g_G);\ (h_H);\end{matrix}\ \frac{-xt}{1-t},\frac{-yt}{1-t}\right] \tag{2·1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda,n)}{n!}\ F^{(2)}\left[\begin{matrix}-n:(b_B);\ (c_C);\\ -:(g_G);\ (h_H);\end{matrix}\ x,y\right]t^n$$

पर्याप्त सरलीकरण के पश्चात् अन्ततः हमें मुख्य फल के रूप में निम्नांकित प्राप्त होता है :

$$(1-t)^{-\lambda}\ F^{(r+2)}\left[\begin{matrix}\lambda:(b^{(1)}_{B_1});\ \ldots;\ (b^{(r+2)}_{B_{r+2}}):\\ -:(d^{(1)}_{D_1});\ \ldots;\ (d^{(r+2)}_{D_{r+2}});\end{matrix}\ \frac{z_1}{1-t},\ \ldots,\ \frac{z_r}{1-t}\frac{-xt}{1-t}\frac{-yt}{1-t}\right] \tag{2·2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda,n)}{n!}\ F^{(2)}\left[\begin{matrix}-n:(b^{(r+1)}_{B_{r+1}});\ (b^{(r+2)}_{B_{r+2}});\\ -:\ (d^{(r+1)}_{D_{r+1}});\ (d^{(r+2)}_{D_{r+2}});\end{matrix}\ x,y\right]$$

$$\times F^{(2)}\left[\begin{matrix}\lambda+n:(b^{(1)}_{B_1});\ \ldots;\ (b^{(r)}_{B_r});\\ -:(d^{(1)}_{D_1});\ \ldots;\ (d^{(r)}_{D_r});\end{matrix}\ z_1,\ldots,z_r\right]t^n,$$

जहाँ $|t|<1$, $B_i\leqq D_i-1$, या यदि $B_i=D_i$ तो $\left|\frac{xt}{1-t}\right|$, $\left|\frac{yt}{1-t}\right|$ तथा $\left|\frac{zi}{1-t}\right|$, $i=1,\ldots,r$; उपयुक्त रीति से प्रतिबन्धित हैं ।

स्पष्टतः सूत्र (2·2) में अनके परिणाम निहित हैं। उदाहरणार्थ (i) $z_1\to0,\ \ldots,\ z_r\to0$ रखने पर हमें सूत्र (2·1) प्राप्त होता है (ii) जब $x\to0$, $y\to0$, तो हमें निम्नांकित सूत्र मिलता है जो श्रीवास्तव के फल का थोडा सार्वीकरण है [5 p. 78 (2·4)]:

$$(1-t)^{-\lambda}\ F^{(r)}\left[\begin{matrix}\lambda:(b^{(1)}_{B_1});\ \ldots;\ (b^{(r)}_{B_r});\\ -:(d^{(1)}_{D_1});\ \ldots;(d^{(r)}_{D_r});\end{matrix}\ \frac{z_1}{1-t},\ \ldots,\ \frac{z_r}{1-t}\right] \tag{2·3}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda, n)}{n!}F^{(r)}\left[\begin{matrix}\lambda+n:(b_{B_1}^{(1)});\ \ldots,(b_{B_r}^{(r)});\\ -:(d_{D_1}^{(1)});\ \ldots;(d_{D_r}^{(1)});\end{matrix}\ z_1,\ldots,z_r\right]t^n..$$

(iii) अन्त में $z_1=z$, $z_2\to0$; ..., $z_r\to0$, $y\to0$ रखने पर हमें

$$(1-t)^{-\lambda}\ F^{(2)}\left[\begin{matrix}\lambda:(b_B);(b'_{B'});\\ -:(d_D);(d'_{D'});\end{matrix}\ \frac{z}{1-t},\ \frac{-xt}{1-t}\right] \tag{2·4}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda, n)}{n!}\ {}_{B'+1}F_{D'}\left[\begin{matrix}-n,(b'_{B'});\\ (d'_{D'});\end{matrix}\ x\right]{}_{B+1}F_D\left[\begin{matrix}\lambda+n,(b_B);\\ (d_D);\end{matrix}\ z\right]t^n$$

प्राप्त होता है जो सूत्र [5, p. 91 (6·1)] है जहाँ $v=0$, $A=E$, $a_i=e_i$; $i=1, \ldots, A$.

यहाँ यह उल्लेख कर दिया जावे कि (2·1), (2·3) तथा (2·4) में कई विशेष दशायें सम्मिलित हैं।

3. इस अनुभाग में फल (2·2) का उपयोग दो चरों में हाइपरज्यामितीय बहुपदों के लिये कतिपय एकाकी जनक फलनों तथा कई चरों में हाइपरज्यामितीय श्रेणियों के प्राप्त करने में किया जावेगा।

हमें लागेर[3] जैकोबी बहुपद तथा दो चरों वाले हर्माइट बहुपदों[2] के लिये निम्नांकित परिभाषाओं की आवश्यकता होगी :

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(x, y)=\frac{(1+\alpha, n)(1+\beta, n)}{(n!)^2}\psi_2\left[\begin{matrix}-n:\ -;\ -;\\ -:1+\alpha;\ 1+\beta;\end{matrix}\ x, y\right]; \tag{3·1}$$

$$\frac{P^{(\alpha_1,\ \beta_1-n;\ \alpha_2,\ \beta_2-n)}}{(1-2x,\ 1-2y)}=\frac{(1+\alpha_1, n)(1+\alpha_2, n)}{(n!)^2}$$

$$\times F_2\left[\begin{matrix}-n:1+\alpha_1+\beta_1;\ 1+\alpha_2+\beta_2;\\ :1+\alpha_1;\ 1+\alpha_2;\end{matrix}\ x, y\right]; \tag{3·2}$$

$$H_{2n}(x, y)=\frac{(-1)^n(2n)!}{n!}\psi_2\left[\begin{matrix}-n:\ -;\ -;\\ :\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\end{matrix}\ x^2, y^2\right]; \tag{3·3}$$

$$H_{2n+1}(x, y)=\frac{(-1)^n(2n+1)!}{n!}4xy\ \psi_2\left[\begin{matrix}-n:\ -;\ -:\\ -:\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\end{matrix}\ x^2, y^2\right]; \tag{3.4}$$

जहाँ F_2 ऐपेल का द्वितीय फलन[1] है तथा ψ_2 दो चरों का हम्बर्ट संगामी हाइपरज्यामितीय फलन[1] है।

(i) (2·2) में $B_{r+1}=B_{r+2}=0$, $D_{r+1}=D_{r+2}=1$, $d_1^{(r+1)}=1+\alpha$, $d_1^{(r+2)}=1+\beta$ रखने पर तथा सम्बन्ध (3·1) का उपयोग करने पर

$$(1-t)^{-\lambda} F^{(r+2)} \begin{bmatrix} \lambda : (b_{B_1}^{(1)}); \ldots; (b_{B_r}^{(r)}); -; -; \\ - : (d_{D_1}^{(r)}); \ldots; (d_{D_r}^{(r)}); 1+\alpha; 1+\beta; \end{bmatrix} \frac{z_1}{1-t}, \ldots, \frac{z_r}{1-t}, \frac{-xt}{1-t}, \frac{-yt}{1-t} \Big] \quad (3{\cdot}5)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda, n) n!}{(1+\alpha, n)(1+\beta, n)} L_n^{(\alpha,\beta)}(x, y)$$

$$\times F^{(r)} \begin{bmatrix} \lambda+n : (b_{B_1}^{(1)}); \ldots : (b_{B_r}^{(r)}); \\ - : (d_{D_1}^{(1)}); \ldots; (d_{Dr}^{(r)}); \end{bmatrix} z_1, \ldots, z_r \Big] t^n.$$

जब $y \to 0$ तथा $\beta = 0$, तो (3·5) निम्नांकित में समानीत हो जाता है

$$(1-t)^{-\lambda} F^{(r+1)} \begin{bmatrix} \lambda : (b_{B_1}^{(1)}); \ldots; (b_{B_r}^{(r)}); -; \\ - : (d_{D_1}^{(1)}); \ldots; (d_{D_r}^{(r)}); 1+\alpha; \end{bmatrix} \frac{z_1}{1-t}, \ldots, \frac{z_r}{1-t}, \frac{-xt}{1-t} \Big] \quad (3{\cdot}6)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda, n)}{(1+\alpha, n)} L_n^{(\alpha)}(x) \; F^{(r)} \begin{bmatrix} \lambda+n : (d_{B_1}^{(1)}); \ldots; (d_{B_r}^{(r)}); \\ - : (d_{D_1}^{(1)}); \ldots; (d_{D_r}^{(r)}); \end{bmatrix} z_1, \ldots,, z_r \Big] t^r.$$

आगे भी यदि $z_1 \to 0, \ldots, z_r \to 0$ तो हमें

$$(1-t)^{-\lambda} {}_1F_1 \begin{bmatrix} \lambda : & \frac{-xt}{1+t} \\ 1+\alpha ; & \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda, n)}{(1+\alpha, n)} L_n^{(\alpha)}(x) t^n, \quad (3{\cdot}7)$$

प्राप्त होता है जो एक ज्ञात फल [4, p. 202 (3)] है ।

(ii) यदि $B_{r+1} = B_{r+2} = D_{r+1} = D_{r+2} = 1$; $b_1^{(r+1)} = 1+\alpha_1+\beta_1$, $b_1^{(r+2)} = 1+\alpha_2+\beta_2$,

$d_1^{(r+1)} = 1+\alpha_1$, $d_1^{(r+2)} = 1+\alpha_2$,

रखें तो (3·2) के अनुसार जैकोबी बहुपदों के लिये दो चरों में निम्नांकित जनक फलन प्राप्त होता है :

$$(1-t)^{-\lambda} F^{(r+2)} \begin{bmatrix} \lambda : (b_{B_1}^{(1)}); \ldots; (b_{B_r}^{(r)}); 1+\alpha_1+\beta_1; 1+\alpha_2+\beta_2 : \\ - : (d_{D_1}^{(1)}); \ldots : (d_{D_r}^{(r)}); 1+\alpha_1; 1+\alpha_2; \end{bmatrix} \frac{z_1}{1-t}, \ldots, \frac{z_r}{1-t},$$

$$\frac{-(1-x)t}{2(1-t)}, \frac{-(1-y)t}{2(1-t)} \Big] \quad (3{\cdot}8)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda, n)\, n!}{(1+\alpha_1, n)(1+\alpha_2, n)} P_n^{(\alpha_1, \beta_1-n;\, \alpha_2, \beta_2-n)}(x, y)$$

$$\times F^{(r)} \begin{bmatrix} \lambda+n : (b_{B_1}^{(1)}); \ldots; (b_{B_r}^{(r)}); \\ - : (d_{D_1}^{(1)}); \ldots; (d_{D_r}^{(r)}); \end{bmatrix} z_1, \ldots, z_r \Bigg] t^n.$$

जब $y \to 1$ तथा $\alpha_2 = 0$, तो यह निम्नांकित में समानीत हो जाता है:

$$(1-t)^{-\lambda} F^{(r+1)} \begin{bmatrix} \lambda : (b_{B_1}^{(1)}); \ldots; (b_{B_r}^{(r)});\ 1+\alpha+\beta; & \frac{z_1}{1-t}, \ldots, \frac{z_r}{1-t}, \frac{-(1-x)t}{2(1-t)} \\ - : (d_{D_1}^{(1)}); \ldots; (d_{D_r}^{(r)});\ 1+\alpha; & \end{bmatrix} \quad (3{\cdot}9)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda, n)}{(1+\alpha, n)} P_n^{(\alpha, \beta-n)}(x) \times F^{(r)} \begin{bmatrix} \lambda+n : (b_{B_1}^{(1)}); \ldots; (b_{B_r}^{(r)}); & z_1, \ldots, z_r \\ - : (d_{D_1}^{(1)}); \ldots; (d_{D_r}^{(r)}); & \end{bmatrix} t^n.$$

(iii) $B_{r+1} = B_{r+2} = 0$, $D_{r+1} = D_{r+2} = 1$, $d_1^{(r+1)} = d_1^{(r+2)} = \frac{1}{2}$ रखने पर, x के स्थान पर x^2 तथा y के स्थान पर y^2 प्रतिस्थापित करने पर (3·3) की सहायता से हमें दो चरों में सम घात के लिये हर्माइट बहुपदों के हेतु निम्नांकित जनक फलन प्राप्त होता है :

$$(1-t)^{-\lambda} F^{(r+2)} \begin{bmatrix} \lambda : (b_{B_1}^{(1)}); \ldots, (b_{B_r}^{(r)});\ -;\ -; & \frac{z_1}{1-t}, \ldots, \frac{z_r}{1-t}, \frac{x^2 t}{1-t}, \frac{y^2 t}{1-t} \\ - : (d_{D_1}^{(r)}); \ldots; (d_{D_r}^{(r)});\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}; & \end{bmatrix} \quad (3{\cdot}10)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda, n)}{(2n)!} H_{2n}(x, y)\, F^{(r)} \begin{bmatrix} \lambda+n : (b_{B_1}^{(1)}); \ldots; (b_{B_r}^{(r)}); & z_1, \ldots, z_r \\ - : (d_{D_1}^{(1)}); \ldots; (d_{D_r}^{(r)}); & \end{bmatrix} t^n.$$

इसी प्रकार $B_{r+1} = B_{r+2} = 0$, $D_{r+1} = D_{r+2} = 1$, $d_1^{(r+1)} = d_1^{(r+2)} = \frac{3}{2}$, रखने पर तथा x के स्थान पर x^2 और y के स्थान पर y^2 रखने पर (3·4) की सहायता से दो चरों वाले विषम घात के लिये हर्माइट बहुपदों के हेतु जनक फलन प्राप्त होता है।

$$4xy(1-t)^{-\lambda} F^{(r+2)} \begin{bmatrix} \lambda : (b_{B_1}^{(1)}); \ldots; (b_{B_r}^{(r)});\ -;\ -; & \frac{z_1}{1-t}, \ldots, \frac{z_r}{1-t}, \frac{-x^2 t}{1-t}, \frac{-y^2 t}{1-t} \\ - : (d_{D_1}^{(1)}); \ldots; (d_{D_r}^{(r)});\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}; & \end{bmatrix} \quad (3{\cdot}11)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda, n)}{(2n+1)!} H_{2n+1}(x, y) \times F^{(r)} \begin{bmatrix} \lambda+n : (b_{B_1}^{(1)}); \ldots; (b_{B_r}^{(r)}); & z_1, \ldots, z_r \\ - : (d_{D_1}^{(1)}); \ldots; (d_{D_r}^{(r)}); & \end{bmatrix} t^n.$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० आर० सी० वर्मा का अत्यन्त कृतज्ञ है जिन्होने इस शोधपत्र की तैयारी में अमूल्य मार्गदर्शन किया ।

निर्देश

1. ऐपेल, पी० तथा कैम्पेद फेरी, जे०, Functions hypergeomtriques at hyperspheriques; Polynomes d'Hermites, Paris; **गाथिर विलर्स**, 1926
2. जैन, आर० एन० तथा दवे, सी० के०, Research Journal Science, **इन्दौर विश्वविद्यालय**, 1972, 17-25
3. पराशर, बी० पी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइं० इंडिया**, 1967, **A37**, 41-48
4. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, **मैकमिलन, न्यूयार्क**, 1960
5. श्रीवास्तव, एच० एम०, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1972, **XXI-1**, 73-99
6. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा डूस्ट, एम० सी०, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., 1969, Ser A. 72—Indag. Math., **31**, 449-457

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 3, July, 1975, Pages, 239-250

क्रोमियम (VI) तथा आयोडाइड अभिक्रिया की अणुगतिकी

वी० एन० भटनागर तथा पी० जी० संत
मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—मई 16 1975]

सारांश

आयोडाइड आयन के उपचयन की अणुगतिकी का अध्ययन परक्लोरिक अम्ल के माध्यम में किया गया। अभिक्रिया की कोटि उपचायक के सापेक्ष 1 तथा हाइड्रोजन आयन के सापेक्ष 2 और आयोडाइड आयन के सापेक्ष 1 और 2 के बीच पाई गई। Cr (VI) की सांद्रता के साथ वेग में परिवर्तन बताता है कि $HCrO_4^-$ सक्रिय उपचायक कण है। सल्फ्यूरिक अम्ल उत्प्रेरक का कार्य करता है। अभिक्रिया की सक्रियण ऊर्जा 8·74 कि० कै० प्रति ग्राम अणु, आवृत्ति गुणक तथा $\triangle S$ के मान क्रमशः $4{\cdot}156 \times 10^7$ mole^{-3} litre^3 sec^{-1} तथा −24 e.u. प्राप्त होते हैं।

प्रस्तुत अभिक्रिया के ऊष्मागतिक स्थिरांक तथा Mn(II) आयन का प्रभाव यह दर्शाते हैं कि संभवत: Cr (VI) वेग निर्धारक वेग में माध्यमिक कण के रूप में भाग लेता है।

Abstract

Kinetics and mechanism of the chromium(VI)—iodide reaction. *By* V. N. Bhatnagar, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal and P. G. Sant, Government College, Khargone (M.P).

Kinetics of oxidation of iodide ion in perchloric acid medium was studied by Cr (VI). The reaction was investigated in presence of 1·5 M NaCl to fix the activity coefficient of the ions. Order of the reaction is one with respect to oxidant and two with respect to hydrogen ion concentration. Variation of rate with concentration of Cr (VI) shows that $HCrO_4^-$ is the active oxidising species. Order of reaction is one at low conctration and two at higher concentration of iodide ions. There is catalysis by H_2SO_4. Thermodynamic parameters for the reaction are : energy of activation : 8·74 Kcals/mole, frequency factor : $4{\cdot}156 \times 10^7$ mole^{-3} litre^3 sec^{-1} and entropy of activation : −24 e.u.

From a study of thermodynamic parameters and the effect of Mn (II) ions on the rate of reaction shows that Cr (VI) acts as a 2-electron oxidant.

अनेक आयनिक अभिक्रियाओं की अणुगतिकी का अध्ययन ठीक से नहीं किया जा सका है, क्योंकि इनमें अभिक्रिया की कोटि पूर्णांक के रूप में प्राप्त नहीं होती है। ब्रान्सटेड[1] ने सुझाव दिया कि यदि, आयनों के सक्रियता गुणांक को स्थिर रखने के लिये, उपयुक्त मात्रा में उदासीन लवण मिला दिये जाएं तो ऐसी अभिक्रियाओं की अणुगतिकी का अध्ययन सामान्य रूप से किया जा सकता है। आयोडाइड आयन का क्रोमिक अम्ल के द्वारा उपचयन इसी प्रकार की एक अभिक्रिया है।

डील्यूरी[2] तथा केर्नोट और पाइटरोफेसा[3] ने भी यह निष्कर्ष निकाला कि अभिक्रिया की कोटि डाइक्रोमेट आयन के सापेक्ष 1, हाइड्रोजन आयन के सापेक्ष लगभग 2 तथा आयोडाइड आयन के सापेक्ष 1 और 2 के बीच होती है।

इस अभिक्रिया का प्रारंभिक अध्ययन बीयर्ड तथा टेलर[4] ने किया। इन्होंने निम्नलिखित वेग-नियम स्थापित किया।

$$-\frac{d}{dt}[HCrO_4^-]=[HCrO_4^-]\{k_1[H^+][I^-]+k_2[H^+]^2[I^-]^2\} \quad (1)$$

जबकि प्रारंभिक वेग की विधि द्वारा आधुनिक अणुगतिकी अध्ययन द्वारा वेग नियम निम्नलिखित पाया गया[5]

$$-\frac{d}{dt}[I^-]=\frac{k_1 k_{12}[Cr(VI)]^2[I^-]^2[H^+]^2}{k_{-11}[I_2]+k_{12}[Cr(VI)]} \quad (2)$$

डेनिस सी गेसविक[6] ने इस अभिक्रिया का अम्लीय जलीय विलयनों में, 20·34° तथा 0·130 M आयनिक सान्द्रता पर वर्णक्रमलेखी विधि द्वारा किया। इनके द्वारा प्राप्त वेग निम्न प्रकार है

$$-\frac{d}{dt}[HCrO_4^-]=[HCrO_4^-]\{0{\cdot}206[H^+][I^-]+111[H^+]^2[I^-]^2+154[H^+]^3[I^-]\} \quad (3)$$

उपलब्ध साहित्य के पर्यवेक्षण से यह प्रतीत होता है कि क्रोमियम-आयोडाइड अभिक्रिया काफी समय से अन्वेषण तथा विवेचना का विषय रही है।

प्रयोगात्मक

सामग्री: क्रोमिक अम्ल का विलयन बेकर ऐनेलाइज्ड क्रोमियम ट्राइआक्साइड को आसुत जल में विलीन करके बनाया गया है तथा इसका मानकीकरण अयोडीमिति अनुमापनों द्वारा किया गया।

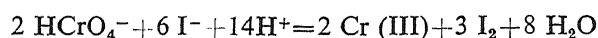
परक्लोरिक अम्ल (रीडेल) का मानकीकरण सोडियम हाइड्राक्साइड (ए० आर०) के मानक विलयन द्वारा किया गया। पोटेशियम आयोडाइड ई० मर्क कोटि का उपयोग में लाया गया। अन्य सभी अभिकर्मक शुद्ध विशिष्टता वाले थे।

अणुगतिक मापन: अभिक्रियाएं कांच की डाट से युक्त, बाहर से काली रंगी बोतलों में स्थिर ताप $\pm(0{\cdot}02)$ पर सम्पन्न की गईं। अभिकर्मक पदार्थ का ताप, तापस्थापी के ताप के बराबर करने के बाद इसी के ताप पर ही अभिक्रिया बोतलों में मिलाया गया। हाइड्रोजन आयन की सांद्रता के लिये परक्लोरिक अम्ल तथा स्थिर आयनिक सान्द्रता के लिये सोडियम क्लोराइड का उपयोग किया गया। सभी क्रियाओं का अध्ययन 1·5 M सोडियम क्लोराइड की उपस्थिति में किया गया क्योंकि परक्लोरिक अम्ल और आयोडाइड की सान्द्रता, क्रोमियम (VI) की सान्द्रता से बहुत अधिक है, इस कारण से यह संम्भव है कि अभिक्रिया का वेग Cr (VI) के समानुपाती माना जा सकता है। समय के एक निश्चित अंतराल पर समभाग निकाले गये और उनको एक अन्य 25 मिली० घोल में जिसमें कि 100 ग्राम सोडियम ऐसीटेट और 10 ग्राम सोडियम बाइकार्बोनेट प्रति लीटर में मिलाया गया, अनभिकृत Cr (VI) की सान्द्रता आयोडीमिति द्वारा ज्ञात कर ली गई। गणना के लिये अभिक्रिया का अनन्त मान (Infinite Value) अंतिम दो पाठ्यांकों का औसत लिया गया।

परिणाम एवं विवेचना

1-(अ) उपचयन

आयोडाइड के क्रोमिक अम्लों द्वारा उपचयन के फलस्वरूप आयोडीन उत्पन्न होता है। इस अभिक्रिया को निम्न रूप में दर्शाया जा सकता है:

$$2\ HCrO_4^- + 6\ I^- + 14H^+ = 2\ Cr\ (III) + 3\ I_2 + 8\ H_2O$$

(आयोडाइड के प्रति तीन ग्राम अणु के लिये Cr (VI) का एक ग्राम अणु लगता है।)

(ब) वेग नियम

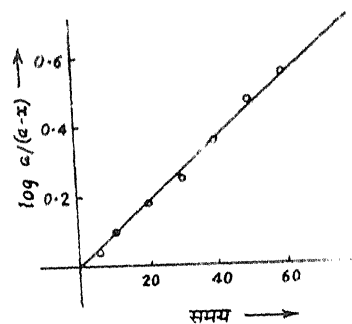
जब आयोडाइड एवं हाइड्रोजन आयनों की सान्द्रता उच्च होती है तो Cr (VI) के विलोप होने का वेग प्रथम कोटि का होता है।

$[Cr\ (VI)] = 1{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M

$[H^+] = 36{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M

$[I^-] = 15{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M

ताप$=25°$ C

$\mu = 0{\cdot}10$ M

सारणी 1

समय मिनटों में	(x)	$\log a/(a-x)$	$k_1 \times 10^2$ min^{-1}
5	0·22	0·0462	2·12
10	0·44	0·0980	2·25
20	0·74	0·1801	2·08
30	0·96	0·2521	1·93
40	1·28	0·3843	2·20
50	1·45	0·4752	2·18
60	1·56	0·5461	2·09
∞	2·18		—

मध्यमान: $2{\cdot}12 \times 10^{-2}$ min^{-1}
ग्राफ से : $2{\cdot}09 \times 10^{-2}$ min^{-1}

Cr (VI) की सांद्रता के साथ वेग में परिवर्तन

Cr (VI) की सांद्रता बढ़ाने पर वेग नियतांक क्रमशः कम हो जाता है।

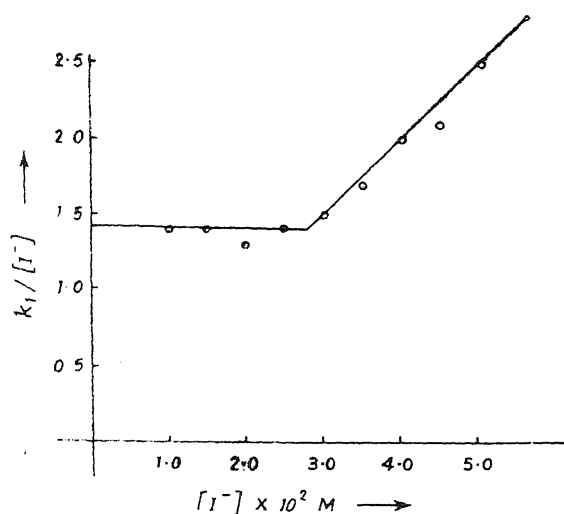
सारणी 2

$[I^-] = 20{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M   ताप$=25°$ C
$[H^+] = 36{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M $\mu = 0{\cdot}10$ M

ग्राम अणु प्रति लिटर $[Cr\ (VI)] \times 10^3$	प्रति मिनट $k_1 \times 10^2$	$[HCrO_4^-] \times 10^4$	$\frac{10^2 k_1\ [Cr\ (VI)]}{[HCrO_4^-]}$
1·0	2·59	9·24	2·30
2·0	2·23	17·46	2.55
4·0	1·61	31·70	2·03
5·0	1·54	38·00	2·00

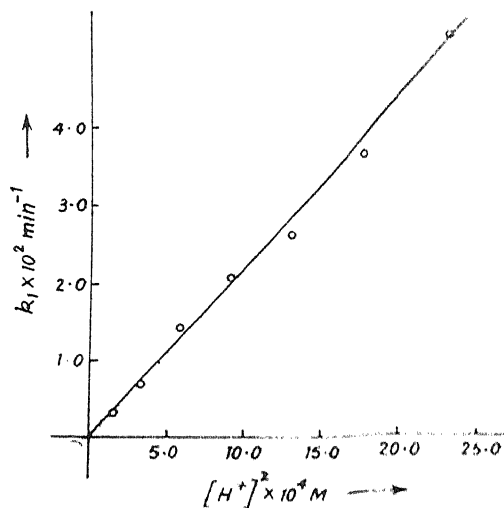
सारणी 2 में दिये परिणाम बताते हैं कि वेग $HCrO_4^-$ की सांद्रता के समानुपाती है। $HCrO_4^-$ के मान, डाइक्रोमेट निर्माण के लिये निर्माण-नियतांक के मान $2{\cdot}4 \times 10^{-2}$ M[7,8] मान कर परिकलित किये गये हैं।

यह बताया जा सकता है कि जब [Cr (VI)]>$k/8$, अर्थात् $3{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M, $HCrO_4^-$ की सांद्रता, क्रोमियम (VI) की कुल सांद्रता के बराबर होती है। प्रस्तुत परिणाम बताते हैं कि $HCrO_4^-$ सक्रिय उपचायक कण है।

आयोडाइड आयन की सांद्रता के साथ वेग में परिवर्तन

सारणी 3

$[I^-] \times 10^2$ ग्राम अणु प्रति लिटर	$k_1 \times 10^2$ प्रति मिनट	$k_1/[I^-]$	$k_1/[I^-]^2$
1·0	1·40	1·40	140·0
1·5	2·09	1·39	92·8
2·0	2·59	1·29	64·7
2·5	3·47	1·38	55·5
3·0	4·50	1·50	50·0
3·5	5·93	1·68	48·4
4·0	7·93	1·98	49·5
4·5	9·56	2·12	47·2
5·0	12·50	2·50	50·0

सारणी 3 के प्रेक्षण से स्पष्ट है कि आयोडाइड आयन के सापेक्ष अभिक्रिया की कोटि एक और दो के बीच है।

हाइड्रोजन आयन की साथ वेग में परिवर्तन :

सारणी 4

$[H^+] \times 10^2$ ग्राम अणु प्रति लिटर	$k_1 \times 10^2$ प्रति मिनट	$[H^+]^2 \times 10^4$	$k_1/[H^+]^2$
1·20	0·32	1·44	22·2
1·80	0·72	3·24	22·2
2·40	1·40	5·76	24·1
3·00	2·07	9·00	23·0
3·60	2·59	12·96	19·9
4·20	3·63	17·46	20·0
4·80	5·10	23·04	22·1

सारणी 4 के प्रेक्षण से स्पष्ट है कि हाइड्रोजन आयन की सांद्रता में परिवर्तन के साथ $\frac{k_1}{[H^+]^2}$ स्थिर रहता है। अतः हाइड्रोजन आयन के सापेक्ष वेग की कोटि दो है।

सल्फ्यूरिक अम्ल की सांद्रता के साथ वेग में परिवर्तन

सारणी 5

$[Cr(VI)] = 1{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M ताप = 25° C

$[I^-] = 25{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M $\mu = 0{\cdot}20$ M

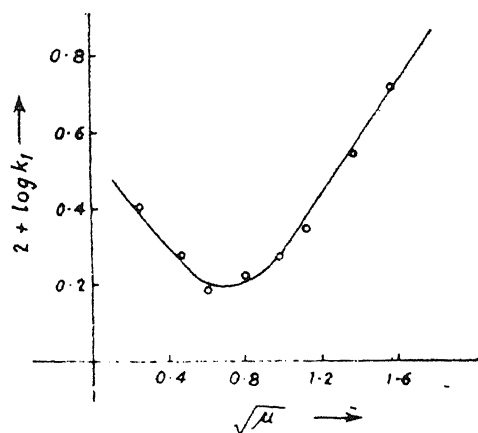
$H_2SO_4 \times 10^2$ ग्राम अणु प्रति लिटर	$k_1 \times 10^2$ प्रति मिनट
1·00	1·33
1·25	1·90
1·50	2·36
1·75	2·87
2·00	3·93
2·25	4·58
2·50	5·29

आयनिक सांद्रता का वेग पर प्रभाव

$[Cr(VI)] = 1{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M

$[H^+] = 36{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M

$[I^-] = 20{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M

ताप = 25° C

सारणी 6

[NaCl] ग्राम अणु प्रति लिटर	$k_1 \times 10^2$ प्रति मिनट	$2 + \log k_1$	$\sqrt{\mu}$ Total
0·00	2·50	0·3979	0·2387
0·15	1·91	0·2810	0·4550
0·30	1·53	0·1847	0·5975
0·60	1·66	0·2201	0·8106
0·90	1·86	0·2695	0·9783
1·20	2·22	0·3464	1·1210
1·80	3·45	0·5378	1·3630
2·40	5·10	0·7076	1·5670

उपचयन वेग पर Mn(II) आयनों का प्रभाव:

सारणी 7

[Cr (VI)=$2{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M   ताप 30° C
[H⁺[=$36{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M μ = 0·80 M
[I⁻]=$20{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M

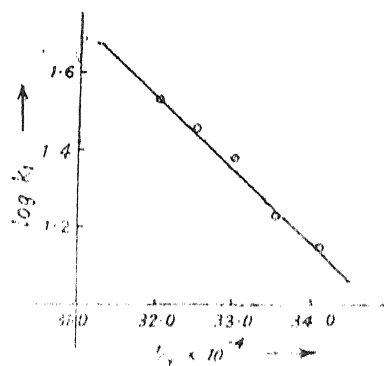
[Mn (II)]×10^2 ग्राम अणु प्रति लिटर	$k_1 \times 10^2$ प्रति लिटर
0·0	3·20
5·0	2·80
10·0	1·66
15·0	1·26
17·5	1·10

ताप का अभिक्रिया वेग पर प्रभाव:

[Cr (VI)]=$1{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M

[I⁻]=$20{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M

[H⁺]=$36{\cdot}0 \times 10^{-3}$ M

μ=0·10 M

सारणी 8

ताप °C	ताप °A	1/T×10^{-4}	$k_1 \times 10^2$	K_1 mole⁻³ litre³ sec⁻¹	log K_1	$pZ \times 10^{-7}$ mole⁻³ litre³ sec⁻¹	ΔE	ΔS
20	293	34·13	2·18	14·02	1·1467	4·263		
25	298	33·55	2·59	16·65	1·2214	3·949		
30	303	33·01	3·68	23·66	1·3740	4·406	8·74	24·76
35	308	32·47	4·37	28·09	1·4486	4·127		e.u.
40	313	31·96	5·34	34·36	1·5361	4·037		

अभिक्रिया का अध्ययन 20° से 40° के मध्य विभिन्न तापों पर किया गया। विशिष्ट वेग नियतांक का मान, प्रेक्षित प्रथम कोटि वेग नियतांक से निम्न समीकरण द्वारा परिकलित किया गया।

$$K_1 = \frac{k_1}{60\,[I^-][H^+]^2}$$

निरपेक्ष ताप के व्युत्क्रम के विरुद्ध लाग विशिष्ट वेग नियतांक ($\log K_1$) के आरेख में सरल रेखा प्राप्त होती है। रेखा के ढाल से परिकलित सक्रिय ऊर्जा 8·74 कि० कै० होतीप्राप्त ग्राम अणु प्रति है। आवृति गुणक pZ तथा $\triangle S$ के मान क्रमश: $4{\cdot}156 \times 10^7$ mole^{-3} litre^3 sec^{-1} तथा -24 e.u. प्राप्त होते हैं।

विवेचना

आयोडाइड आयन के क्रोमिक अम्ल द्वारा उदासीन लवण के आधिक्य की उपस्थिति में उपचयन के प्रस्तुत अध्ययन के संबंध में निम्नांकित निष्कर्ष प्राप्त हुये:

1. क्रोमिक अम्ल के सापेक्ष अभिक्रिया की कोटि 1 तथा $HCrO_4^-$ सक्रिय उपचायक कण पाया गया।

2. हाइड्रोजन आयन सांद्रता-परिवर्तन का अभिक्रिया के वेग पर प्रभाव बताता है कि हाइड्रोजन आयन सांद्रता के सापेक्ष अभिक्रिया की कोटि 2 है। सल्फ्यूरिक अम्ल की सांद्रता में बृद्धि अभिक्रिया वेग में बृद्धि करती है, किंतु सल्फ्यूरिक अम्ल की सांद्रता के सापेक्ष अभिक्रिया की कोई निश्चित कोटि निर्धारित नहीं की जा सकी।

3. आयोडाइड आयन की कम सांद्रता पर अभिक्रिया की कोटि 1 और अधिक सांद्रता पर कोटि 2 पाई गई।

4. प्रेक्षित प्रथम कोटि वेग नियतांक ($\log k_1$) को आयनिक सांद्रता के वर्गमूल के विरुद्ध आलेखित करने पर प्राप्त परिणामों से निश्चित निष्कर्ष नहीं निकाले जा सके।

5. Mn(II) अभिक्रिया वेग को कम कर देता है। Mn(II) आयनों की सांद्रता लगभग $17{\cdot}5 \times 10^{-2}$M होने पर, Mn(II) आयनों की अनुपस्थिति के सापेक्ष अभिक्रिया का वेग लगभग 1/3 कम हो जाता है। ये परिणाम उस स्थिति में अपेक्षित हो सकते हैं, जब Mn(II) आयन क्रोमियम की माध्यमिक संयोजकता अवस्थाओं के असमानुपातन (Disproportion) को उत्प्रेरित करे। इससे प्रतीत होता है कि संभवत: Cr (IV) वेग निर्धारक पग में माध्यमिक कण के रूप में भाग लेता है।[8,9]

6. प्रस्तुत अभिक्रिया के ऊष्मागतिक स्थिरांक, आक्सैलेट-क्रोमियम अभिक्रिया के अनुरूप ही पाये गये। यह तथ्य बताता है कि आयोडाइड-क्रोमियम (VI) अभिक्रिया की क्रियाविधि आक्सैलेट-क्रोमियम (VI) की अभिक्रिया के अनुरूप में होनी चाहिये[10]।

प्रस्तुत अध्ययन में निम्नांकित वेग नियम प्राप्त हुये :

$$-\frac{d}{dt}[HCrO_4^-]=[HCrO_4^-]\{k_1[I^-]+k_2[H^+]^2[I^-]^2\} \quad (4)$$

1—4 समीकरणों में अनुरूपता न होना निराशाजनक नहीं है, क्योंकि जैसा कि एडवर्ड्स[11] ने बताया कि टेलर और बीयर्डस के आंकडों की विवेचना $K_c[H^+]^2[I^-]$ तथा $K_b[H^+][I^-]^2$ पदों को सम्मिलित करके भी की जा सकती है। यद्यपि, हालेट तथा सर्सफील्ड द्वारा H^+ तथा I^- के लिये दो से कम कोटि प्राप्त न कर पाने के लिये कोई भी संतोषजनक व्याख्या नहीं दी जा सकी। गैसविक द्वारा प्राप्त वेग नियम में $[H^+]^3[I^-]$ पद, $[H^+]_0=0{\cdot}110$ M पर प्राप्त होता है, जबकि हालेट तथा सर्सफील्ड द्वारा बतायी गई अधिकतम सांद्रता $[H^+]_0=0{\cdot}05$ M है। यह मात्र इस तथ्य का उदाहरण है कि अनेक जटिल अभिक्रियाओं के वेग में नियम विशिष्ट नहीं होते वरन् वे अध्ययन विशेष में प्रयुक्त सांद्रता परिसर के लिए ही अनुकूल होते हैं। वेग नियमों में अन्तर के कारण इनकी परिमाणात्मक तुलना संभव नहीं है।

गैसविक तथा क्रुजर, अभिक्रिया वेग पर क्रोमियम (VI) तथा Mn (II) आयनों के प्रभाव का अध्ययन करने में असमर्थ रहे क्योंकि वे अभिक्रिया में उत्पन्न होने वाली कुछ जटिलताओं को न्यूनतम रखने के लिये, क्रोमियम (VI) की सांद्रता कम रखना चाहते थे[12,13]। $HCrO_4^-$ की सांद्रता $1{\cdot}5\times10^{-5}$ के अधिक होने पर वेग नियतांक $HCrO_4^-$ पर निर्भर नहीं करते तथा क्रोमियम (VI) के लिये एकमात्र महत्वपूर्ण कण $HCrO_4^-$ होता है जो एक विशिष्ट अध्ययन में ΣCr (VI) का 98% होता है।

संभवतः वेग नियम में पत्येक पद, अभिक्रिया का एक पृथक पथ निर्देशित करता है। सक्रिय संकुलता का निर्माण करने वाले संभव पग निम्नांकित हैं:—

$$HCrO_4^-+H^+ \overset{\text{द्रुत}}{\rightleftharpoons} H_2CrO_4$$

$$H_2CrO_4^-+I^- \overset{\text{द्रुत}}{\rightleftharpoons} [ICrO_3]^-+H_2O \quad \text{(i)}$$

$$[ICrO_3]^-+H^+ \overset{\text{द्रुत}}{\rightleftharpoons} [HI\,.\,CrO_3] \quad \text{(ii)}$$

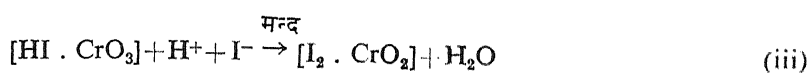
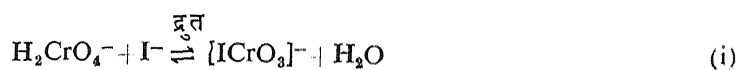
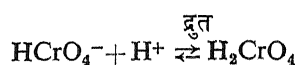
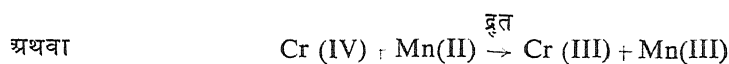
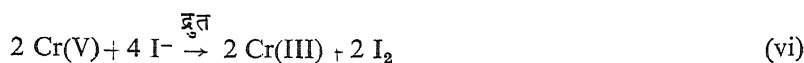
$$[HI\,.\,CrO_3]+H^++I^- \xrightarrow{\text{मन्द}} [I_2\,.\,CrO_2]+H_2O \quad \text{(iii)}$$

$$[I_2\,.\,CrO_2] \xrightarrow{\text{द्रुत}} I_2+Cr(IV) \quad \text{(iv)}$$

$$Cr(IV)+Cr(VI) \xrightarrow{\text{द्रुत}} 2\,Cr(V) \quad \text{(v)}$$

$$2\,Cr(V) + 4\,I^- \xrightarrow{\text{द्रुत}} 2\,Cr(III) + 2\,I_2 \qquad \text{(vi)}$$

अथवा

$$Cr\,(IV) + Mn(II) \xrightarrow{\text{द्रुत}} Cr\,(III) + Mn(III)$$

$ICrO_3^-$ कण, $Cl^-CrO_3^-$ कणों के[14] अनुरूप, संभव माध्यमिक कणों का कार्य करते हैं। डाइक्रोमेट आयन के जल अपघटन के उत्प्रेरण में मृदु न्यूक्लियग्राही की तरह काम करने वाले थायोयूरिया[15] के अनुरूप I^- को भी Cr(VI) के प्रति उत्प्रेरक मृदू न्युक्लियग्राही माना जा सकता है। क्रोमियम (VI) द्वारा कार्बनिक यौगिकों के उपचयन की गति को Mn(II) आयन या तो अक्रियाशील MnO_2 के निर्माण द्वारा और/या क्रोमियम की माध्यमिक संयोजकता अवस्थाओं के असमानुपातन द्वारा कम कर देता है। प्रस्तुत अध्ययन में MnO_2 नहीं बनता। विलयन में I_2CrO_2 कणों की उपस्थिति भी संभव है, जो ज्ञात एवं स्थायी और जल के द्वारा अपघटित हो जाने वले CrO_2Cl_2 कणों के अनुरूप है[16]।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत कार्य में आर्थिक सहायता देने के लिये लेखक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का और संपूर्ण कार्य में मार्ग दर्शन एवं उत्साह वर्धन के लिये डा० एस० एन० कवीश्वर एवं डा० पी० बी० चक्रबर्ती के आभारी हैं।

निर्देश

1. ब्रान्स्टेड, 'The Theory of Velocity of Ionic Reactions', Columbia Univ. Press, New york, p. 13, (1927)
2. डील्यूरी, **जर्न० फिजि० केमिस्ट्री** 1903, 7,239
3. केर्नोट तथा पाइटरोफेसा, Rend. accad. sci. fis. mat. Napoli, 1911, **IIIA**, 275
4. बीयर्ड, आर० एफ० तथा टेलर, एल० डब्लु०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०** 1929, **51**, 1973
5. हालेट, के० ई० तथा सर्सफील्ड, एस०, **जर्न० केमि० सोसा०** 1968, A, 683
6. डेनिस, सी० गैसविक तथा जेम्स एच० क्रुजर, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1969, **91**, 2240
7. वाइवर्ज, के० बी० तथा मिल, टी०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०** 1958, **80**, 3022
8. वेस्थीमर, एफ० एच०, **केमि० रिव्यूज**, 1949, **45**, 419
9. वतानबी, डब्लू० और वेस्थीमर एफ० एच०, **जर्न० केमि० फिजि०** 1949, **17**, 61
10. भटनागर, वी० एन०, तथा संत पी० जी०, **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका**, 1974, **17**, 261-270

11. एडवर्ड्स, जे० ओ०, **केमि० रिव्यूज**, 1953, 50, 455

12. टांग, जे० वाई० तथा जानसन आर० एल०, **इनआर्गनिक केमि०**, 1966, 3, 1902

13. टांग, जे० वाई०, **इनआर्गनिक केमि०** 1964, 3, 1804

14, ह्यट, जी० पी०, रिचर्डसन, डी० सी० तथा कोबर्न एन० एच०, इनआर्गनिक केमि०, 1964, 3, 1777

15. परलम्यूटर-हेमन, बी० तथा वल्फ, एम० ए०, **कैने० जर्न० केमि०**, 1965, 43, 2913

16. एल्बर्ड काटन, एफ० तथा विलकिनसन, जी०, Advanced Inorg. Chem., p. 690

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 3, July, 1975, Pages 251-260

$\omega-2$H परिवर्तों के कतिपय समाकल निरूपण

सी० के० शर्मा
गणित विभाग, एस० एस० एल० टी०, पी० वी० एम०, पारसिया (म० प्र०)

[प्राप्त—फरवरी 6, 1974]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में $\omega-2H$ परिवर्त पर $w_{k,m}(x)$ के विभिन्न समाकल निरूपणों का प्रयोग करते हुये तीन प्रमेय दिये गये हैं। इस प्रकार से स्थापित प्रमेयों का उपयोग परावलयी सिलिंडर तथा जैकोबी बहुपदों के साथ सार्वीकृत फाक्स H-फलन वाले समाकलों के मान ज्ञात करने के लिये किया गया है।

Abstract

Certain integral representations of the $\omega-2$H Transforms. *By* C. K. Sharma, Department of Mathematics, S.S.L.T., P. V. M., Parasia (M. P.).

In the present paper, three theorems on $\omega-2H$ transform have been given by using different integral representation of $w_{k,\,m}(x)$. The theorems, so established have been further used to evaluate the integrals involving generalized Fox H-function with the parabolic cylinder and Jacobi polynomials.

1. **विषय प्रवेश :** प्रस्तुत शोधपत्र में $\omega-2H$ परिवर्त के लिये[2], हमने कुछ समाकल निरूपण प्राप्त किये हैं, जिसे निम्न रूप में परिभाषित किया गया है :

$$\phi(p)=\int_0^\infty (px)^{\rho-1}\, e^{-1/2px}\, w_{k,\,m}(px)$$

$$\times H_{L,\,Q+1}^{m+1,\,N}\left[A(px)^{\sigma 1}\left|\begin{matrix}(A_L,\alpha'_L)\\(B_O,\beta'_O),(B_Q,\beta_Q')\end{matrix}\right.\right] H_{u,\,v}^{f,\,g}\left[c(px)^{\mu}\left|\begin{matrix}(c_u,\gamma_u)\\(d_v,\delta_v)\end{matrix}\right.\right] f(x)dx \qquad (1{\cdot}1)$$

बशर्ते $\sigma'>0,\ \mu>0;\ X\neq 0,\ R(\frac{1}{2}-k\pm m)>0,\ \beta'<R(B_0/\beta'_0)<\delta',\ |\arg ap^{\sigma 1}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$,

जहाँ $H_{u, v}^{f, g}\left[c(px)^{\mu}\middle|\begin{matrix}(c_u, \gamma_u)\\(d_v, \delta_v)\end{matrix}\right]=\begin{cases}0(|x|^{\delta''}), & \text{लघु } x \text{ के लिये}\\0(|x|^{\beta''}), & \text{बृहद } x \text{ के लिये}\end{cases}$

$$\delta''=\min R(d_i/\delta_i)(i=1, 2, \ldots, f), \qquad (1\cdot2)$$

$$\beta''=\max R\left(\frac{c_i-1}{\gamma_i}\right)(i=1, 2, \ldots, g), \qquad (1\cdot3)$$

$$\lambda''=\sum_{1}^{q}\gamma_j-\sum_{g+1}^{u}\gamma_j+\sum_{1}^{f}\delta_j-\sum_{f+1}^{v}\delta_j>0 \qquad (1\cdot4)$$

$$A_3=\sum_{1}^{v}\delta_j-\sum_{1}^{u}\gamma_j>0 \qquad (1\cdot5)$$

तथा इसी प्रकार δ', β', λ', A_2 चार प्रमेयों के रूप में प्रथम H-फलन के लिये हैं और मायजर[1] के द्वारा प्राप्त $w_{k,m}(px)$ के विभिन्न समाकल निरूपणों को समाकल परिवर्त $\phi(p)$ = $ZH[f(x)]$ के दाहिने पक्ष में प्रयुक्त करते हैं तथा उपयुक्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समाकलन के क्रम को परस्पर विनिमय कर देते हैं।

हमारे द्वारा सिद्ध किये गये प्रयोगों का उपयोग ऐसे अनेक समाकलों के मान ज्ञात करने के लिये भी किया गया है जिनमें सार्वीकृत H-फलन सन्निहित हैं और परावलयी सिलिंडर तथा जैकोबी बहुपदों से युक्त हैं[3, 4]।

संकेत : हम (1·1) में $\phi(p)$ को सांकेतिक रूप में

$$\Phi_{M+1, N, L, Q+1, f, g, u, v}^{k, m, \rho, \sigma^1, \mu, A, c}(p) \text{ के द्वारा प्रदर्शित करेंगे।} \qquad (1\cdot6)$$

2. प्रमेय 1

$$\phi(p)=\Phi_{M+1, N, L, Q+1, f, g, u, v}^{k, m, \rho, \sigma1, \mu, A, c}(p)=ZH[f(x)], \qquad (2\cdot1)$$

तो

$$\phi(p)=\frac{z^{2m+1}\Gamma(1-2k)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k\pm m)}\int_0^{\infty}\frac{\cosh 2mt}{\cosh^{1/2} t}\, g(p, t)\, dt, \qquad (2\cdot2)$$

जहाँ

$$g(p, t)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sinh^{2r} t}{r\,!}\,\Phi_{M+1, N, L, Q+1, f, g, u, v}^{k-1/4,\, -1/4,\, r+\rho+1/4,\, \sigma1,\, \mu,\, A\operatorname{sech}3\sigma^1 t,\, c\operatorname{sech}2\mu t}(p\cosh^2 t), \qquad (2\cdot3)$$

बशर्ते कि $R(p)>0$, $|\arg p|<3\pi/2$, $R(\frac{1}{2}-k\pm m)>0$, $R(\rho+\sigma\delta'+\mu\delta''+\mu_1+\frac{1}{2})>0$, $|\arg Ap^{\sigma^1}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$, $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$,

जहाँ

$$f(x)=\begin{cases}0(x^{\mu_1}), & \text{लघु } x \text{ के लिये}\\ 0(e^{-\mu_2 x}), & \text{वृहद } x \text{ के लिये}\end{cases}$$

तथा परिणामी समाकल (2·2) पूर्णतया अभिसारी है।

उपपत्ति :

निरूपण $w_{k,\, m}(px)$ के लिये माइजर [1 p. 601] का समाकल प्रयुक्त करने पर

$$w_{k,\, m}(px)=\frac{2^{k+3/2}\Gamma(1-2k)(px)^{1/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k\pm m)}$$

$$\times\int_0^\infty e^{1/2px\,\sin^2 t}\,D_{2k-1}(\sqrt{(2px\cosh^2 t)}\cosh 2mt\,dt, \qquad (2\cdot4)$$

जहाँ $p\neq 0$, $|\arg p|<\frac{3\pi}{2}$ तथा $R(\frac{1}{2}-k\pm m)>0$, तो हमें

$$\phi(p)=\frac{2^{k+3/2}\Gamma(1-2k)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k\pm m)}\int_0^\infty (px)^{\rho-1/2}\,e^{-1/2px}\,H_{L,\,Q+1}^{M+1,\,N}\left[A(px)^{\sigma^1}\left|\begin{matrix}(A_L,\alpha'_L\\(B_O,\beta'_O),(B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H_{u,\,v}^{f,\,g}\left[c(px)^{\mu}\left|\begin{matrix}(c_u,\gamma_u)\\(d_v,\delta_v)\end{matrix}\right.\right]f(x)\;dx\int_0^\infty e^{1/2px\,\sinh^2 t}D_{2k-1}(\sqrt{(2px\cosh^2 t)}\cosh 2mt\;dt. \qquad (2\cdot5)$$

प्राप्त होता है।

$D_{2k-1}(\sqrt{(2px\ \cosh^2 t)}$ के मान को सम्बन्ध

$$D_n(z)=2^{1/2n+1/4}\,z^{-1/2}\,w_{1/2n+1/4,\,-1/4}(\tfrac{1}{2}z^2), \qquad (2\cdot6)$$

में से प्रतिस्थापित करने पर तथा समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर

$$\phi(p)=\frac{2^{2k+1}\Gamma(1-2k)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k\pm m)}\int_0^\infty\frac{\cosh 2mt}{\cosh^{1/2} t}\,dt\int_0^\infty (px)^{\rho-3/4}\,e^{-1/2}px(1\ \sinh^2 t)$$

$$\times H_{L,\,Q+1}^{M+1,\,N}\left[A(px)^{\sigma^1}\left|\begin{matrix}(A_L,\alpha'_L)\\(B_O,\beta'_O)(B'_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right.\right]H_{u,\,v}^{f,\,g}\left[c(px)^{\mu}\left|\begin{matrix}(c_u,\gamma_u)\\(d_v,\delta_v)\end{matrix}\right.\right]$$

$$W_{k-1/4,-1/4}(px\cosh^2 t)\,f(x)\,dx$$

$$=\frac{2^{2k+1}\,\Gamma(1-2k)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k\pm m)}\int_0^\infty\frac{\cosh 2mt}{\cosh^{1/2} t}\,g(p,t)\,dt, \qquad (2\cdot7)$$

जहाँ $$g(p,t)=\int_0^\infty (px)^{\rho-3/4}\,e^{-1/2px}\cosh^2 t\;e^{px}\sinh^2 t\;w_{k-1/4,\,-1/4}(px\cosh^2 t)$$

$$\times H^{M+1,\,N}_{L,\,Q+1}\left[A(px)^{\sigma^1}\left|\begin{matrix}(A_L,\,\alpha'_L)\\(B_O,\,\beta'_O),(B_Q,\,\beta'_Q)\end{matrix}\right.\right] H^{f,\,g}_{u,\,v}\left[c(px)^{\mu}\left|\begin{matrix}(c_u,\,\gamma_u)\\(d_v,\,\delta_v)\end{matrix}\right.\right] f(x)\,dx.$$

अब $e^{px}\sinh^2 t$ का प्रसार करने पर तथा समाकलन एवं संकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर

$$\phi(p,t)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sinh^{2r}t}{r!}\;\Phi^{k-1/4,\,-1/4,\,r+\rho+1/4,\,\sigma^1,\,\mu,\,A\,\mathrm{sech}\,2\sigma^1 t\,c\,\mathrm{sech}\,2\mu\,t}_{M+1,\,N,\,L,\,Q+1,\,f,\,g,\,u,\,v}\;(p\cosh^2 t).$$

इस प्रकार प्रमेय सिद्ध हो जाता है ।

उदाहरण : माना कि $f(x)=x^{\sigma}$

तो समाकल का उपयोग करते हुये जो [5, 6] की भाँति प्राप्त किया जाता है ।

$$\int_0^{\infty} x^{\sigma}\; H^{m,\,o}_{l,\,q}\left[px\left|\begin{matrix}(a_l,\,\alpha_l)\\(b_q,\,\beta_q)\end{matrix}\right.\right] H^{M+1,\,N}_{L,\,Q+1}\left[A\,(px^{\mu})\left|\begin{matrix}(A_L,\,\alpha'_L)\\(B_O,\,\beta'_O),(B_Q,\,\beta'_Q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H^{f+1,\,g}_{u,\,v+1}\left[c(px)^{\mu}\left|\begin{matrix}(c_u,\,\gamma_u)\\((d_O,\,\delta_O),(d_v,\,\delta_v)\end{matrix}\right.\right] dx$$

$$=p^{-\sigma-1}\;H^{m,\,N,\,g,\,M+1,\,f+1}_{q,\,(L:u),\,l,\,(Q+1:v+1)}\left[\begin{matrix}\\A\\c\\\end{matrix}\left|\begin{matrix}(1-b_q-\sigma\beta_q-\beta_q,\,\mu\beta_q)\\(1-A_L,\,\alpha'_L);(1-c_u,\,\gamma_u)\\(a_l+\sigma\alpha_l+\alpha_l,\,\mu\alpha_l)\\(B_O,\,\beta'_O),(B_Q,\,\beta'_Q);(d_O,\,\delta_O),(d_v,\,\delta_v)\end{matrix}\right.\right],\qquad(2\cdot8)$$

बशर्ते कि $A, c, \mu>0$, $R[\sigma+\max\{(b_n/\beta_n)\}+\mu\max\{(B_O/\beta'_O);(B_m/\beta'_m)\}+\mu\max\{(d_O/\delta_O),(d_f/\delta_f)\}]>0$, $|\arg Ap^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$, $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$, $\sum_1^{l}\alpha_j-\sum_1^{q}\beta_j<0$, $\sum_1^{L}\alpha'_j$

$-\sum_1^{Q}\beta'_j\leqslant 0$, $\sum_1^{\mu}\gamma_j-\sum_1^{v}\delta_j\leqslant 0$, जहाँ λ', λ'' अपना पूर्ववत् अर्थ रखते हैं ।

$$\phi_2(p)=\;\Phi^{k,\,m,\,\rho,\,\mu,A,\,c}_{M+1,\,N,\,L,\,Q+1,\,f,\,g,\,u,\,v}\;(p)$$

$$=p^{-\sigma-1}\;H^{z,\,N,\,g,M+1,\,f}_{z,\,(L:\,u),\;1,(Q+1:v)}\left[\begin{matrix}\\A\\c\\\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}-\sigma-\rho+m,\,\mu)\\(1-A_L,\,\alpha'_L);\,(1-c_u,\,\gamma_u)\\(1+\rho-k+\sigma,\,\mu)\\(B_O,\,\beta'_O),(B_Q,\,\beta'_Q);(d_v,\,\delta_v)\end{matrix}\right.\right],\qquad(2\cdot2)$$

बशर्ते कि $\mu>0$, $R(\rho+\sigma\pm m+\frac{1}{2}+\mu\delta'+\mu\delta'')>0$, $|\arg A|<\frac{1}{2}\lambda'\pi\,(\lambda'>0)$ तथा $|\arg c|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$

और भी,

$$\phi(g,t)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sinh^{2r}t}{r!}\,\Phi^{k-1/4,\ -1/4,\ r+\rho+1/4,\ \mu,\ \mu,\ A\,\mathrm{sech}\,2\mu\ t\ c\,\mathrm{sech}\,2\mu\ t}_{M+1,\ N,\ L,\ \Omega+1,\ f,\ g,u,\ v}(p\cosh^2 t)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sinh^{2r}t}{r!}(p\cosh^2 t)^{-\sigma-1}\,H^{2,\ N,\ g,\ M+1,\ f}_{2,\ (L:\ u),\ 1,\ (\Omega+1:\ v)}\left[\begin{matrix}A\,\mathrm{sech}^{2\mu}t\\ \\ c\,\mathrm{sech}^{2\mu}t\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\tfrac14-\sigma-r+\rho\pm m,\ \mu)\\ (1-A_L,\alpha'_L);(1-c_u,\ \gamma_u)\\ (\tfrac12+\rho+r-k+\sigma,\ \mu)\\ (B_O,\ \beta'_O),(B_\Omega,\ \beta'_\Omega)(d_v,\delta'_v)\end{matrix}\right.\right] \quad (2\cdot10)$$

बशर्ते कि $\mu>0$, $R(\rho+\sigma\pm m+\tfrac12+\mu\delta'+\mu\delta'')>0$, $|\arg(A\,\mathrm{sech}^{2\mu}t)|<\tfrac12\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg(c\,\mathrm{sech}^{2\mu}t)|<\tfrac12\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

अतः प्रमेय का उपयोग करने पर हमें

$$\int_0^\infty \cosh 2mt\ \mathrm{sech}^{2\sigma+5/2}t\ \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\sinh^{2r}t}{r!}\,H^{2,\ N,\ g,\ M+1,f}_{2,\ (L:u),\ 1,(\Omega+1:\ v)}\left[\begin{matrix}A\,\mathrm{sech}^{2\mu}t\\ \\ c\,\mathrm{sech}^{2\mu}t\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\tfrac14-\sigma-r+\rho\pm m,\ \mu)\\ (1-A_L,\ \alpha'_L);(1-c_u,\ \gamma_u)\\ (\tfrac12+\rho+r-k+\sigma,\ \mu)\\ (B_O,\ \beta'_O),(B_\Omega,\ \beta'_\Omega);(d_v,\ \delta_v)\end{matrix}\right.\right]dt \quad (2\cdot11)$$

$$=\frac{\Gamma(\tfrac12-k\pm m)}{2^{2k+1}\Gamma(1-2k)}\,H^{2,\ N,\ g,\ M+1,\ f}_{2,\ (L:\ u),\ 1,\ (\Omega+1:\ v)}\left[\begin{matrix}A\\ \\ c\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\tfrac12-\sigma-\rho\pm m,\ \mu\\ (1-A_L,\ \alpha'_L);(1-c_u,\ \gamma_u)\\ (1+\rho-k+\sigma,\ \mu)\\ (B_O,\ \beta'_O),(B_\Omega,\ \beta'_\Omega);(d_v,\ \delta_v)\end{matrix}\right.\right], \quad (2\cdot11)$$

प्राप्त होता है बशर्ते कि $R(\tfrac12-k\pm m)>0$, $R(\rho+\sigma+\mu\delta'+\mu\delta''+\tfrac12)>0$, $|\arg A|<\tfrac12\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg c|<\tfrac12\lambda''\tau(\lambda''>0)$.

प्रमेय 2

यदि $$\phi(p)=\Phi^{k,\ m,\ \rho,\ \sigma^1,\ \mu,\ A,\ c}_{M+1,\ N,\ L,\ \Omega+1,\ f,\ g,\ u,\ v}(p)=w-2H[f(x)], \quad (3\cdot1)$$

तो $$\phi(p)=2\int_0^\infty P^k_{m-1/2}(\cosh 2t)\sinh^{1-k}t\cos^{k-2\rho+1}t$$

$$\times\Phi^{-m+1/2,\ m,\ \rho+m+1/2,\ \sigma^1,\ \mu,\ A\ \mathrm{sech}\ 2\sigma^1\ t,\ \mathrm{sech}^{2\mu}\ t}_{M+1,\ N,\ L,\ \Omega+1,\ f,\ g,\ u,\ v}(p\cosh^2 t)\,dt, \quad (3\cdot2)$$

बशर्ते $R(p)>0$, $|\arg p|<\pi/2$, $R(k)>3/2$, $R(m+\rho+\frac{1}{2}\pm m+\sigma'\delta'+\mu\delta''+\mu_1)>0$, $|\arg Ap^{\sigma^1}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$, $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda'>0)$,

जहाँ $f(x)=\begin{cases}0(x^{\mu_1}), & \text{लघु } x \text{ के लिये}\\ 0(e^{-\mu_2 x}) & \text{वृहद } x \text{ के लिये}\end{cases}$

तथा (3·2) में परिणामी समाकल पूर्णतया अभिसारी है।

उपपत्ति :

माइजर [1, p. 600] के अनुसार $w_{k,m}(px)$ के समाकल निरूपण का उपयोग करने पर

$$W_{k,m}(px)=2(px)\int_0^\infty e^{-1/2px\cosh 2t}\ P^k_{m-1/2}(\cosh 2t)\sinh^{1-k}t\cosh^{1+k}t\,dt, \tag{3·3}$$

जहाँ $p\neq 0$ $|\arg p>\pi/2$, $R(k)<3/2$. तो हमें

$$\phi(p)=2\int_0^\infty (px)^\rho\ e^{-1/4px}\ H^{M+1,N}_{L,Q+1}\left[A(px)^{\sigma^1}\left|\begin{matrix}(A_L,\alpha'_L)\\(B_O,\beta'_O)(B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\times H^{f,g}_{u,v}\left[c(px)^{\mu}\left|\begin{matrix}(c_u,\gamma_u)\\(d_v,\delta_v)\end{matrix}\right.\right]\int_0^\infty e^{-1/2px\cosh 2t}\ P^k_{m-1/2}(\cosh 2t)\sinh^{1-k}t\cosh^{1+k}t\,dt \tag{3·4}$$

प्राप्त होगा।

समाकल का क्रम परिवर्तित करने पर तथा तत्समक

$$z^{m-1/2}\ W_{-m+1/2,m}(z)=e^{-1/2z},$$

का उपयोग करने पर हमें निम्नलिखित की प्राप्ति होगी

$$\Phi^{k,m,\rho,\sigma,\mu,A,c}_{M+1,N,L,Q+1,f,g,u,v}(p)=2\int_0^\infty P^k_{m-1/2}(\cosh 2t)\sinh^{1-k}t\cosh^{k-2\rho+1}t\,dt$$

$$\times\int_0^\infty (px\cosh^2 t)^{\rho+m-1/2}\ e^{-1/2px\cosh^2 t}\ W_{-m+1/2,m}(px\cosh^2 t)$$

$$\times H^{M+1,N}_{L,Q+1}\left[A(px)^{\sigma^1}\left|\begin{matrix}(A_L,\alpha'_L)\\(B_O,\beta'_O),(B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right.\right]H^{f,g}_{u,v}\left[c(px)^{\mu}\left|\begin{matrix}(c_u,\gamma_u)\\(d_v,\delta_v)\end{matrix}\right.\right]f(x)\,dx$$

$$=2\int_0^\infty P^k_{m-1/2}(\cosh 2t)\sin^{1-k}t\cosh^{k-2\rho+1}t$$

$$\times\Phi^{-m+1/2,\ m,\ \rho+m+1/2,\ \sigma^1,\ \mu,\ A\,\mathrm{sech}\,2\sigma^1 t,\ c\,\mathrm{sech}2\mu t}_{M+1,N,L,Q+1,f,g,u,v}(p\cosh^2 t)\,dt$$

समाकल के क्रम के व्युत्क्रमण को सरलतापूर्वक वैध ठहराया जा सकता है।

उदाहरण : माना कि $f(x)=x^{\sigma}$.

तो (2·9) की ही भाँति

$$\Phi^{k,m,\ \rho,\ \mu,\ \mu,\ A,\ c}_{M+1,\ N,\ L,\ Q+1,\ f,\ g,u,\ v}\ (p)$$

$$=p^{-\sigma-1}\ H^{z,\ N,\ g,\ M+1,f}_{2,\ (L:u),\ 1,\ (Q+1:v)}\left[\begin{array}{c|l} A & (\tfrac{1}{2}-\sigma-\rho\pm m,\ \mu) \\ & (1-A_L,\ \alpha'_L);(1-c_u,\ \gamma_u) \\ c & (1+\rho-k+\sigma,\ \mu) \\ & (B_O,\beta'_O),(B_Q,\ \beta'_Q);(d_v,\ \delta_v) \end{array}\right], \tag{3.7}$$

बशर्ते कि (2·9) में दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट हों।

(3·7) से

$$\Phi^{-m+1/2,\ m,\ \rho+m+1/2,\ \mu,\ \mu,\ A\ \text{sech}^{2\mu}\ t\ \text{sech}^{2\mu}\ t}_{M+1,\ N,\ L,\ Q+1,\ f,\ g,\ u,\ v}\ (p\ \cosh^2 t)$$

$$=(p\ \cosh^2 t)^{-\sigma-1}\ H^{1,\ N,\ g,\ M+1,\ f}_{1,\ (L:u),\ 0,\ (Q+1:\ v)}\left[\begin{array}{c|l} A\ \text{sech}^{2\mu}\ t & (-\sigma-\rho,\ \mu) \\ & (1-A_L,\ \alpha'_L);(1-c_u,\ \gamma_u) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c\ \text{sech}^{2\mu}\ t & (B_O,\ \beta'_O),(B_Q,\ \beta'_Q);(d_v,\ \delta_v) \end{array}\right], \tag{3·8}$$

बशर्ते $\mu>0$, $R(p)>0$, $R(\rho+m+\sigma+\mu\delta'+\mu\delta''\pm m+1)>0$, $|\arg A|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg c|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

अन्त में प्रमेय में परिणाम (3·7) तथा (3·8) का उपयोग करने पर हमें समाकल

$$\int_0^{\infty} P^k_{m-1/2}\ (\cosh 2t)\ \sinh^{1-k} t\ \cosh^{k-2\rho-2\sigma-1} t$$

$$\times H^{1,\ N,\ g,\ M+1,\ f}_{1,\ (L:u),\ 0,\ (Q+1:v)}\left[\begin{array}{c|l} A\ \text{sech}^{2\mu}\ t & (-\sigma-\rho,\ \mu) \\ & (1-A_L,\ \alpha'_L);(1-c_u,\ \gamma_u) \\ c\ \text{sech}^{2\mu}\ t & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & (B_O,\ \beta'_O),(B_Q,\ \beta'_Q);(d_v,\ \delta_v) \end{array}\right] dt$$

$$=\frac{1}{2}H^{2,\, N,\, g,\, M+1,\, f}_{2,\, (L:\, u),\, 1,\, (Q+1:v)}\left[\begin{array}{c|l} A & (\frac{1}{2}-\sigma-\rho\pm m,\, \mu) \\ & (1-A_L,\, \alpha'_L);(1-c_u,\, \gamma_u) \\ & (1+\rho-k+\sigma,\, \mu) \\ c & (B_Q,\, \beta'_Q),(B_Q,\, \beta'_Q);(d_v,\, \delta_v) \end{array}\right], \tag{3·9}$$

प्राप्त होता है बशर्ते $\mu>0$, $R(k)<3/2$, $R(m+\rho+\sigma\pm m+\mu\delta'+\mu\delta''+\frac{1}{2})>0$, $|\arg A|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg c|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

4. प्रमेय 3

यदि $\phi(p)=\Phi^{k,\, m,\, \rho,\, \sigma^1,\, \mu,\, A,c}_{M+1,\, N,\, L,\, Q+1,\, f,\, g,\, u,\, v}(p)=W-2H[f(x)]$, (4·1)

तो
$$\phi(p)=2^{2\lambda}\int_0^\infty P^{1-2\lambda}_{2m-1/2}(\cosh t)\tanh^{2\lambda} t\, \text{sech}^{2\rho-3/2} t$$

$$\times\Phi^{k+\lambda,\, -1/4,\, \rho+\lambda,\sigma^1,\, \mu,\, A\, \text{sech}2\sigma^1 t,\, \mu\, \text{sech}^2 t}_{M+1,\, N,\, L,\, Q+1,\, f,\, g,\, u,\, v}(p\cosh^2 t)\, dt, \tag{4·2}$$

बशर्ते कि $\mu>0$, $R(p)>0$, $|\arg p|<\frac{1}{2}\pi$, $R(\lambda)>0$, $R(\rho+\lambda+\sigma'\delta'+\mu\delta''+\mu_1+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{4})>0$, $|\arg Ap^{\sigma'}|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$, $|\arg cp^{\mu}|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$

जहाँ $f(x)=\begin{cases}0(x^{\mu_1}) & \text{, लघु } x \text{ के लिये} \\ 0(e^{-\mu_2 x}), & \text{वृहद } x \text{ के लिये}\end{cases}$

तथा परिणामी समाकल (4·2) पूर्णतया अभिसारी है।

उपपत्ति

माइजर के अनुसार [1, p. 600] $W_{k,\, m}(px)$ के लिये समाकलन निरूपण का व्यवहार करने पर

$$W_{k,\, m}(px)=2^{\lambda-k+1/4}(px)^{\lambda+1/4}\int_0^\infty e^{-1/2px\sinh^2 t}D_{2k+2\lambda-1/2}(\sqrt{(2px\cosh^2 t)})$$

$$\times\sinh^2 t\, P^{1-2\lambda}_{2m-1/2}(\cosh t)\, dt, \tag{4·3}$$

जहाँ $p\neq 0$, $|\arg p|<\pi/2$ तथा $R(\lambda)>0$, तो

$$\phi(p)=2^{\lambda-k+1/4}\int_0^\infty (px)^{\rho+\lambda-3/4}e^{-1/2px}\, H^{M+1,\, N}_{L,\, Q+1}\left[A(px)^\sigma\left|\begin{array}{c}(A_L,\, \alpha'_L) \\ B_Q,\, \beta'_Q),(B_Q,\, \beta'_Q)\end{array}\right.\right]$$

$$\times H^{f,\, g}_{u,\, v}\left[c(px)^\mu\left|\begin{array}{c}(c_u,\, \gamma_u) \\ (d_v,\, \delta_v)\end{array}\right.\right]f(x)\, dx\int_0^\infty e^{-1/2px\sinh^2 t}D_{2k+2\lambda-1/2}(\sqrt{(2px\cosh^2 t)})$$

$$\times\sinh^2 t\quad P^{1-2\lambda}_{2m-1/2}(\cosh t)\, dt \tag{4·4}$$

सम्बन्ध (2·6) का उपयोग करने तथा समाकलन के क्रम को बदलने पर

$$\phi(p)=2^{2\lambda}\int_0^\infty P^{1-2\lambda}_{2m-1/2}(\cosh t)\tanh^{2\lambda} t\ \mathrm{sech}^{2\rho-3/2} t\ dt \int_0^\infty (px\cosh^2 t)^{\rho+\lambda-1} e^{-1/2px\cosh^2 t}$$

$$\times W_{k+\lambda,-1/4}(px\cosh^2 t)\ H^{M+1,N}_{L,Q+1}\left[A(px)^{\sigma^1}\left|\begin{matrix}(A_L,\alpha'_L\\(B_O,\beta'_O),(B_Q,\beta'_Q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$H^{f,g}_{u,v}\left[c(px)^{\mu}\left|\begin{matrix}(c_u,\gamma_u)\\(d_v,\delta_z)\end{matrix}\right.\right]f(x)\,dx$$

$$=2^{2\lambda}\int_0^\infty P^{1+2\lambda}_{2m-1/2}(\cosh t)\tanh^{2\lambda} t\ \mathrm{sech}^{2\rho-3/2} t$$

$$\times\Phi^{k+\lambda,-1/4,\ \rho+\lambda,\ \sigma^1,\ \mu,\ A\,\mathrm{sech}\,2\sigma^1 t,\ c\,\mathrm{sech}\,2\mu\, t}_{M+1_1\ N,\ h,\ Q+1,\ f,\ g,\ u,\ v}(p\cosh^2 t)\,dt. \tag{4·5}$$

समाकलन के क्रम का व्युत्क्रमण सरलतापूर्वक वैध ठहराया जा सकता है।

उदाहरण : माना कि $f(x)=x^{\sigma}$.

तो $\Phi^{k,\ m,\ \rho,\ \mu,\ \mu,\ A,\ c}_{M+1,\ N,\ L,\ Q+1,\ f,\ g,\ u,\ v}$

$$(p)=p^{-\sigma-1}H^{2,\ N,\ g,\ M+1\ f}_{2,\ (L:u),\ 1,\ (Q+1:v)}\left[\begin{matrix}A\\ \\ c\\ \end{matrix}\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}-\sigma-\rho\pm m,\ \mu\\(1-A_L,\ \alpha'_L);(1-c_u,\gamma_u)\\(1+\rho-k+\sigma,\mu)\\(B_O,\beta'_O),(B_Q,\beta'_O);(d_0,\delta_0)\end{matrix}\right.\right] \tag{4·6}$$

बशर्ते कि $\mu>0$, $R(\rho+\sigma\pm m+\frac{1}{2}+\mu\delta'+\mu\delta'')>0$, $|\arg A|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg c|<\frac{1}{2}\lambda'\pi$ $(\lambda''>0)$.

(4·6) से हमें

$$\Phi^{k+\lambda,\ -1/4,\ \rho+\lambda,\ \mu,\ \mu,\ A\,\mathrm{sech}2\mu\, t,\ c\,\mathrm{sech}2\mu\, t}_{M+1,\ N,\ L,\ Q+1,\ f,\ g,\ u,\ v}(p\cosh^2 t)$$

$$=(p\cosh^2 t)^{-\sigma-1}H^{2,\ N,\ g,\ M+1,\ f,}_{2,\ (L:\ u),\ 1,\ (Q+1:\ v)}\left[\begin{matrix}A\,\mathrm{sech}^{2\mu} t\\ c\,\mathrm{sech}^{2\mu} t\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\frac{1}{2}-\sigma-\rho-\lambda\pm\frac{1}{4},\ \mu)\\(1-A_L,\ \alpha'_L);(1-c_u,\ \gamma_u)\\(1-\rho-k+\sigma,\ \mu)\\(B_O,\ \beta'_O),(B_Q,\ \beta'_Q);(d_v,\ \delta_v)\end{matrix}\right.\right], \tag{4·7}$$

प्राप्त होता है बशर्ते कि $\mu>0$, $R(\lambda)>0$, $R(p)>0$, $R(\rho+\lambda+\sigma+\mu\delta'+\mu\delta''+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{4})>0$, $|\arg A|<\frac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg c|<\frac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

अब प्रमेय में (4·6) तथा (4·7) का उपयोग करने पर हमें निम्नांकित समाकल प्राप्त होता है :

$$\int_0^\infty P_{2m-1/2}^{1-2\lambda}(\cosh t)\tanh^{2\lambda} t\, \mathrm{sech}^{2\rho+2\sigma+1/2}\, t$$

$$\times H_{2,\,(L:u),\,1,\,(Q+1:v)}^{2,\,N,\,g,\,M+1,\,f}\left[\begin{array}{l|l} & (\tfrac{1}{2}-\sigma-\rho-\lambda\pm\tfrac{1}{4},\ \mu) \\ A\ \mathrm{sech}^{2\mu}\, t & (1-A_L,\ \alpha'_L);(1-c_u,\ \gamma_u) \\ c\ \mathrm{sech}^{2\mu}\, t & (1-\rho-k+\sigma,\ \mu) \\ & (B_Q,\ \beta'_Q),(B_Q,\ \beta'_Q);(d_v,\ \delta_v) \end{array}\right] dt$$

$$=2^{-2\lambda} H_{2,\,(L:u),\,1,\,(Q+1:v)}^{M2,\,N,\,g,\,+1,\,f}\left[\begin{array}{l|l} & (\tfrac{1}{2}-\sigma-\rho\pm m.,\ \mu) \\ A & (1-A_L,\ \alpha'_L);(1-c_u,\ \gamma_u) \\ c & (1+\rho-k+\sigma,\ \mu) \\ & (B_Q,\beta'_Q),(B_Q,\ \beta'_Q);(d_v,\ \delta_v) \end{array}\right], \tag{4·8}$$

बशर्ते कि $\mu>0$, $R(\lambda)>0$, $R(\rho+\lambda+\mu\delta'+\mu\delta''+\sigma+\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{4})>0$, $|\arg A|<\tfrac{1}{2}\lambda'\pi(\lambda'>0)$ तथा $|\arg c|<\tfrac{1}{2}\lambda''\pi(\lambda''>0)$.

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक श्री आर० एल० यादव का आभारी है जिन्होंने सभी प्रकार की सुविधाएँ प्रदान की ।

निर्देश

1. माइजर, सी० एस०, Proc. Nederl Akad. v. Wetensch, Amsterdam, 1941, **44**, 298-307, 435-441 तथा 599-605.
2. शर्मा, सी० के०, Port. Mathematics, 1974, 33.
3. वही, **इण्डियन जर्न० प्योर ऐण्ड एप्ला० मैथ०**, 1973, **4**, 278-86.
4. वही, 22 (1972), 227-230.
5. शर्मा, सी० के० तथा गुप्ता, पी० एम०, **इंडियन जर्न० प्योर एण्ड ऐप्ला० मैथ०** (प्रेषित)
6. वही, The Mathematics Student, 1972, XLA, 239-252.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 3, July, 1975, Pages 261-268

दो चरों वाले सार्वीकृत फलन तथा उनके सम्प्रयोगों वाले त्रिगुण समाकल सम्बन्ध

वाई० एन० प्रसाद तथा आर० के० गुप्ता
सम्प्रयुक्त गणित विभाग, आई० टी०, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—मई 1, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य दो चरों वाले H-फलन के लिये कतिपय त्रिगुण समाकल सम्बन्ध स्थापित करना और उनका सम्प्रयोग दो चरों वाले दो H-फलनों के गुणनफल सम्बन्धी कतिपय त्रिगुण समाकलों का मान निकलना है। इन फलों से कई रोचक विशिष्ट दशायें प्राप्त की गई हैं। प्राप्त फल कौल तथा डहिया द्वारा दिये गये फलों के सार्वीकरण हैं।

Abstract

Triple integral relations involving generalised function of two variables and their applications. *By* Y. N. Prasad and R. K. Gupta, Applied Mathematics Section, I. T., B. H. U., Varanasi.

The aim of this paper is to establish certain triple integral relations involving the H-function of two variables and employ them to evaluate certain triple integrals involving the products of two H-functions of two variables. Many interesting particular cases have been deduced from our results. The results are the generalisations of the results given by Kaul[2] and Dahiya[3].

1. **परिचयात्मक :** मित्तल तथा गुप्ता[1] ने दो चरों वाले H-फलन को सांकेतिक रूप में निम्न प्रकार से परिभाषित किया है :

$$H(x, y) = H\left[\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0, 0 \\ p_1, q_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2\ q_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_3, n_3 \\ p_3, q_3 \end{pmatrix} \end{matrix} \left| \begin{matrix} \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \\ \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\} \\ \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\} \\ \{e_{p_3}, E_{p_3})\} \\ \{(f_{q_3}, F_{q_3})\} \end{matrix} \right| \begin{matrix} x \\ \\ y \\ \\ \\ \end{matrix} \right]$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{L_1}\int_{L_2} \phi(s,t)\, \theta_1(s)\theta_2(t)\, x^s y^t\, ds\, dt \qquad (1\cdot1)$$

जहाँ $\phi(s,t)=\left[\prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(1-b_j+\beta_j s+B_j t)\prod_{j=1}^{p_1}\Gamma(a_j-\alpha_j s-A_j t)\right]^{-1}$

$$\theta_1(s)=\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-\delta_j s)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+\gamma_j s)\left[\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+\delta_j s)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-\gamma_j s)\right]^{-1}$$

$$\theta_2(t)=\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(f_j-F_j t)\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_j t)\left[\prod_{j=m_3+1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+F_j t)\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-E_j t)\right]^{-1}$$

तथा प्राचल $m_2, m_3, n_2, n_3, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ etc. इत्यादि भी वहीं परिभाषित हैं[1]।

2. इस अनुभाग में हम अपने मुख्य फलों को निम्न रूप में स्थापित करेंगे :

$$\text{(i)} \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{2\xi}}{(x^2+y^2)^{\xi-\frac{1}{2}}}\frac{1}{y}\frac{F(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)}\cos(2m\tan^{-1}y/x)\, f\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{z}\right)\times H\left\{a(x^2+y^2+z^2)^c\frac{x^{2h}}{(x^2+y^2)^h},\ b(x^2+y^2+z^2)\right\} dx\,dy\,dz$$

$$=\frac{\pi}{2^{2\xi+1}}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{F(u^2+v^2)}{\sqrt{(u^2+v^2)}} f(\tan^{-1} v/u)\, H\left(\begin{array}{c|c} \cdots & \cdots \\ \begin{matrix} m_2, n_2+1 \\ p_2+1, q_2+2 \end{matrix} & \begin{matrix} (-2\xi, 2h), \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}, (-\xi\pm m, h) \end{matrix} \\ \cdots & \cdots \end{array}\ \middle|\ \begin{matrix} \frac{a(u^2+v^2)^c}{4^h} \\ \\ b(u^2+v^2) \end{matrix}\right) du\, dv \qquad (2\cdot1)$$

बशर्ते कि (i) $h, c, \delta, >0, m=0, 1, 2, \ldots,$

(ii) $R(\xi+h\alpha+\frac{1}{2})>0$, जहाँ $\alpha=\min R\frac{d_i}{\delta_i}(i=1,\ldots,m_2)$ तथा f और F इस प्रकार चुने जाते हैं कि समाकल का अस्तित्व रहे।

..........से सूचित होता है कि (1·1) के प्राचलों में कोई परिवर्तन नहीं हुआ।

$$\text{(ii)} \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{2\xi}}{(x^2+y^2)^{\xi-1/2}}\frac{1}{y}\frac{F(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)} f\left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{z}\right)\cos(2m\tan^{-1}y/x)$$

$$H\left\{a(x^2+y^2+z^2)^c \frac{x^{-2h}}{(x^2+y^2)^{-h}} \cdot b(x^2+y^2+z^2)\right\} dx\, dy\, dz$$

$$= \frac{\pi}{2^{2\xi+1}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{F(u^2+v^2)}{\sqrt{(u^2+v^2)}} f(\tan^{-1} v/u)$$

$$H\left[\begin{array}{c|c|c} \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \frac{a(v^2+v^2)^c}{4^{-h}} \\ \begin{pmatrix} m_2+1, n_2 \\ p_2+2, q_2+1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\}(1+m+\xi, h) \\ (1+2\xi, 2h), \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\}\end{array} & \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & b(u^2+v^2) \end{array}\right] du\, dv \qquad (2\cdot2)$$

बशर्ते कि (i) $h, c, \delta > 0, m = 0, 1, 2, \ldots,$

(ii) $R(\xi - h\alpha + \frac{1}{2}) > 0$, जहाँ $\alpha = \min \frac{d_i}{\delta_i}$, $(i = 1. \ldots, m_2)$ तथा F और f इस प्रकार चुने जाते हैं कि समाकल का अस्तित्व रहे।

(iii) $$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{2\xi}}{(x^2+y^2)^{\xi-1/2}} \frac{1}{y} \frac{F(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)} f\left(\tan^{-1} \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{z}\right) \cos(2m \tan^{-1} y/x)$$

$$H\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} 0, 0 \\ p_1, q_1+1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \\ (2\xi; 2h, 2k)\ \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}\end{array} & a(x^2+y^2+z^2)^c \frac{x^{2h}}{(x^2+y^2)^h} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & b(x^2+y^2+z^2) \frac{x^{2k}}{(x^2+y^2)^k} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \end{array}\right] dx\, dy\, dz$$

$$= \frac{\pi}{2^{2\xi+1}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{F(u^2+v^2)}{\sqrt{(u^2+v^2)}} f(\tan^{-1} v/u)$$

$$H\left[\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} 0, 0 \\ p_1, q_1+2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \\ (-\xi \pm m; h, k), \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\}\end{array} & \frac{a(u^2+v^2)^c}{4^h} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \frac{b(u^2+v^2)}{4^k} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \end{array}\right] du\, dv \qquad (2\cdot3)$$

बशर्ते कि (i) $h, c, \delta > 0, m = 0, 1, 2, \ldots,$

(ii) $R\left(\xi + h\frac{d_j}{\delta_i} + k\frac{f_j}{F_j} + \frac{1}{2}\right) > 0$, $(i = 1, \ldots, m_2, j = 1, \ldots m_3)$ तथा F और f इस प्रकार चुने जाते हैं कि समाकलों का अस्तित्व रहे।

3. **फलों की उपपत्ति**

प्रथम फल की प्राप्ति के लिये हम कौल[2] के निम्नांकित समाकल से प्रारम्भ करेंगे :

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2m\,\theta)(\cos\theta)^{2\xi}\; H\{au^c(\cos\theta)^{2h}, bv^\delta\}\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2^{2\xi+1}} H\left[\begin{pmatrix} m_2, n_2+1 \\ p_2+1, q_2+2 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ (-2\xi, 2h), \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ \{(a_{q_2}, \delta_{q_2})\}. (-\xi \pm m, h) \\ \cdots & \cdots \end{matrix} \right| \begin{matrix} \frac{au^c}{4^h} \\ bv^\delta \end{matrix} \right] \tag{3·1}$$

बशर्ते कि $h.\ c, \delta>0,\ m=0, 1, 2. \ldots,$

$Re(\xi+h\alpha+\frac{1}{2})>0,\ \ \alpha=\min(d_i/\delta_i),\ i=1, \ldots, m_2.$

अब (3·1) में $u=v=r^2$ रखने पर तथा दोनों ओर $F(r^2)\, f(\phi)\, dr\, d\phi$ से गुणा करने पर एवं $0\leqslant r<\infty,\ 0\leqslant\phi\leqslant\frac{1}{2}\pi$ सीमाओं के अन्तर्गत r तथा ϕ के प्रति समाकलित करने पर यह

$$\int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r^2 \sin\theta} F(r^2) f(\phi) \cos 2m\theta\, (\cos\theta)^{2\xi} H\{ar^{2c}(\cos\theta)^{2h}, br^{2\delta}\}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{\pi}{2^{2\xi+1}} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r} F(r^2) f(\phi)$$

$$H\left[\begin{pmatrix} m_2, n_2+1 \\ p_2+1, q_2+2 \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ (-2\xi, 2h)\{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ (-\xi\pm m, h), \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\} \\ \cdots & \cdots \end{matrix} \right| \begin{matrix} \frac{ar^{2c}}{4^h} \\ br^{2\delta} \end{matrix} \right] r\, dr\, d\phi \tag{3·2}$$

में समानीत हो जाता है बशर्ते कि समाकलों का अस्तित्व रहे।

अब (3·2) में बाईं ओर $y=r\sin\theta\sin\phi,\ z=r\cos\phi,\ dx\,dy\,dz=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$ से गोलीय ध्रुवीय से कार्तीय में परिवर्तन लाने पर तथा दाईं ओर $u=r\cos\phi,\ v=r\sin\phi,\ du\,dv=r\,dr\,d\phi$ से ध्रुवीय से कार्तीय में परिवर्तन लाने पर हमें (2·1) की प्रप्ति होती है।

(2·2) तथा (2·3) के लिये हम कौल[2] के निम्नांकित समाकलों का उपयोग करेंगे।

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2m\theta)(\cos\theta)^{2\xi}\; H\{au^c(\cos\theta)^{-2h}, bv^\delta\}\, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2^{2\xi+1}} H \left[\begin{pmatrix} m_2+1, n_2 \\ p_2+2, q_2+1 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\}(1+\xi \pm m, h) \\ (1+2\xi; 2h), \{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{au^c}{4^{-h}} \\ bv^\delta \end{matrix} \right]$$

बशर्ते कि $h, c, \delta > 0, m = 0, 1, 2, \ldots$, तथा $Re(\xi - h\alpha + \frac{1}{2}) > 0$, और

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2m\theta (\cos\theta)^{2\xi} H \left[\begin{pmatrix} 0, 0 \\ p_1, q_1+1 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \\ (-2\xi; 2h, 2k\{(b_{q_1}; \beta_{q_1}; B_{q_1})\} \\ \ldots \ldots \ldots \\ \ldots \ldots \ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} au^c \cos^{2h}\theta \\ bv^\delta \cos^{2k}\theta \end{matrix} \right] d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2^{2\xi+1}} H \left[\begin{pmatrix} 0, 0 \\ p_1, q_1+2 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} \{(a_{p_1}; \alpha_{p_1}, A_{p_1})\} \\ (-\xi \pm m; h, k). \{(b_{q_1}; \beta_{q_1}, B_{q_1})\} \\ \ldots \ldots \ldots \\ \ldots \ldots \ldots \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{au^c}{4^h} \\ \frac{bv^\delta}{4^k} \end{matrix} \right]$$

बशर्ते कि $h, k, c, \delta > 0. m = 0, 1, 2, \ldots,$

$$Re[\xi + h \min (d_i/\delta_i) + k \min (f_j/F_j) + \tfrac{1}{2}] > 0,$$

$$(i = 1, \ldots, m_2; \; j = 1, \ldots, m_3).$$

विशिष्ट दशायें

(2·1) के बाईं ओर $\frac{Fu(^2+v^2)}{\sqrt{(u^2+v^2)}} = F(u^2+v^2)$

$$f(\tan^{-1} v/u) = \cos (2m \tan^{-1} v/u) \cos^{2\xi} (\tan^{-1} v/u) = \frac{u^{2\xi}}{(u^2+v^2)^\xi} \cos (2m \tan^{-1} v/u)$$

तथा $h=0$ रखने से यह

$$\frac{\pi}{2^{2\xi+1}} = \frac{\Gamma(1+2\xi)}{(1+\xi \pm m)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u^{2\xi}}{(u^2+v^2)^\xi} \cos (2m \tan^{-1} v/u) H\{a(u^2+v^2)^c, b(u^2+v^2)^\delta\} F(u^2+v^2)\, dn\, dv \qquad (4·1)$$

में समानीत हो जाता है।

अब कौल[2] के समाकल का उपयोग करने पर अर्थात्

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{u^{2\xi}}{(u^2+v^2)^\xi} \cos(2m \tan^{-} v/u)\, H\{a(u^2+v^2)^c, b(u^2+v^2)^\delta\}\, F(u^2+v^2)\, du\, dv$$

$$=\frac{\pi\xi}{2^{2\xi+1}}\left\{\frac{\Gamma(2\xi)}{\Gamma(1+\xi\pm m)}\right\}^2\int_0^\infty H\{at^c, bt^\delta\}\, F(t)\, dt$$

बशर्ते कि समाकलों का अस्तित्व हो हमारे फल (2·1),(2·2) तथा (2·3) निम्नांकित में समानीत हो जाते हैं।

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{2\xi}}{(x^2+y^2)^{\xi-1/2}}\,\frac{1}{y}\,\frac{F(x^2+y^3+z^2)}{(x^2+q^2+z^2)^{1/2}} \cos(2m\tan^{-1} y/x)\cos\left(2m_1 \tan^{-1}\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{z}\right)$$

$$\frac{z^{2\xi}}{(x^2+y^2+z^2)^\xi}\, H\{a(x^2+y^2+z^2)^c, b(x^2+y^2+z^2)^\delta\}\, dx\, dy\, dz$$

$$=\frac{\pi\xi}{2^{2\xi+1}}\left\{\frac{\Gamma(2\xi)}{1+\xi\pm m}\right\}^2\int_0^\infty H\{at^c, bt^\delta\}\, F(t)\, dt. \qquad (4\cdot2)$$

बशर्ते कि समाकलों का अस्तित्व हो।

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{2\xi}}{(x^2+y^2)^{\xi-1/2}}\,\frac{1}{y}\,\frac{F(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^9+z^2)^{1/2}} \cos(2m\tan^{-1} y/x)\cos\left(2m_1 \tan^{-1}\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{z}\right)$$

$$\frac{x^{2\xi}}{(x^2+y^2+z^2)^\xi}\, H\{a(x^2+y^2+z^2)^c, b(x^2+y^2+z^2)^\delta\}\, dx\, dy\, dz$$

$$=\frac{\pi}{2^{2\xi+2}}\left\{\frac{(1+2\xi)}{(1+\xi\pm m)}\right\}^2\int_0^\infty H\{at^c, bt^\delta\}\, F(t)\, dt \qquad (4\cdot3)$$

बशर्ते कि समाकलों का अस्तित्व हो तथा

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{2\xi}}{(x^2+y^2)^{\xi-1/2}}\,\frac{1}{y}\,\frac{F(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \cos(2m\tan^{-1} y/x)\cos\left(2m_1 \tan^{-1}\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{z}\right)$$

$$\frac{z^{2\xi}}{(x^2+y^2+z^2)^\xi}\, H\left[\begin{matrix}\cdots & \cdots & \cdots \\ \begin{pmatrix} m_2, n_2 \\ p_2, q_2+1\end{pmatrix} \\ \cdots & \cdots & \cdots\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix}\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \{(c_{p_2}, \gamma_{p_2})\} \\ (-2\xi, 2k),\{(d_{q_2}, \delta_{q_2})\} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\end{matrix}\;\middle|\;\begin{matrix} a(x^2+y^2+z^2)^c \\ b(x^2+y^2+z^2)^\delta\end{matrix}\right] dx\, dy\, dz$$

$$=\frac{\pi}{2^{2\xi+2}}\,\frac{(1+2\xi)}{\{(1+\xi\pm m)\}^2}\int_0^\infty H\{at^c, bt^\delta\}\, F(t)\, dt \qquad (4\cdot4)$$

बशर्ते कि समाकलों का अस्तित्व हो।

5. सम्प्रयोग

(4·2), (4·3) तथा (4·4) में क्रमशः $F(t)=t^{s-1}\, H^*\{At^{\lambda},\, Bt^{\mu}\}$ रखने पर जहाँ

$$H^*(x, y)=H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0, 0\\ P_1, Q_1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}M_2, 0\\ P_2, Q_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1, N_3\\ P_3, Q_3+1\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}\{a'_{P_1};\, \alpha'_{P_1}, A'_{P_1}\}\\ \{b'_{Q_1};\, \beta'_{Q_1}, B'_{Q_1}\}\\ \{c'_{P_2}, \gamma'_{P_2}\}\\ \{d'_{Q_2}, \delta'_{Q_2}\}\\ \{e'_{P_3}, E'_{P_3}\}\\ (f'_O, F'_O), \{f'_{Q_3}, F'_{Q_3}\}\end{matrix}\right|\begin{matrix}x\\ \\ y\end{matrix}\right]$$

हमें निम्नांकित की प्राप्ति होती है

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x^{2\xi}}{(x^2+y^2)^{\xi-1/2}}\frac{1}{y}\cos(2m\tan^{-1}y/x)\cos\left(2m_1\tan^{-1}\frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{z}\right)$$

$$\frac{z^{2\xi}}{(x^2+y^2+z^2)^{\xi}}\, H[a(x^2+y^2+z^2)^c,\, b(x^2+y^2+z^2)^{\delta}]\, (x^2+y^2+z^2)^{s-3/2}$$

$$H^*[A(x^2+y^2+z^2)^{\lambda},\, B(x^2+y^2+z^2)^{\mu}]\, dx\, dy\, dz$$

$$=\frac{\pi\xi}{2^{2\xi+1}}\left\{\frac{\Gamma(2\xi)}{(1+\xi\pm m)}\right\}^2 A^{-s/\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r\,!}A^{-(\mu/\lambda)}B^{\rho_r}\, g(r)$$

$$H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0, M_2\\ P_1+Q_1+Q_2, P_1+P_2+q_1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_2, n_2\\ p_2, q_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}m_3, n_3\\ p_3, q_3\end{pmatrix}\end{matrix}\left|\begin{matrix}R\\ S\\ \{c_{p_2}, \gamma_{p_2}\}\\ \{d_{q_2}, \delta_{q_2}\}\\ \{e_{p_3}, E_{p_3}\}\\ \{f_{q_3}, F_{q_3}\}\end{matrix}\right|\begin{matrix}aA^{-c/\lambda}\\ \\ bA^{-\delta/\lambda}\end{matrix}\right]$$

जहाँ R में

$$\{a_{p_1};\, \alpha_{p_1}, A_{p_1}\},\ \left\{1-d'_{Q_2}-\frac{(\mu\rho_r+s)}{\lambda}\delta'_{Q_2};\ \frac{c}{\lambda}\delta'_{Q_2},\ \frac{\delta}{\lambda}\ \delta'_{Q_2}\right\},$$

$$\{1-b'_{Q_1}+B'_{Q_1}\rho_r-\beta'_{Q_1}\frac{(\mu\rho_r+s)}{\lambda};\ \frac{c}{\lambda}\beta'_{Q_1},\ \frac{\delta}{\lambda}\beta'_{Q_1}\}$$

का तथा S में

$$\{b_{q_1}, \beta_{q_1}, B_{q_1}\}, \left\{1-a'_{p_1}+A'_{p_1}\rho_r-\frac{(\mu\rho_r+s)}{\lambda}\alpha'_{p_1}; \frac{c}{\lambda}\alpha'_{p_1}, \frac{s}{\lambda}\alpha'_{p_1}\right\}$$

$$\left\{1-c'_{p_2}-\frac{(\mu\rho_r+s)}{\lambda}\gamma'_{p_2}; \frac{c}{\lambda}\gamma'_{p_2}, \frac{s}{\lambda}\gamma'_{p_2}\right\}$$

$$g(r)=\frac{\prod_{j=1}^{N_3}\Gamma(1-e'_j+E'_j\rho_r)}{\prod_{j=N_3+1}^{P_3}\Gamma(e'_j-E'_j\rho_r)\prod_{j=1}^{Q_3}\Gamma(1-f'_j+F'_j\rho_r)},$$

और $\rho_r=\dfrac{f'_o+r}{F'_o}$

का बोध होता है बशर्ते कि $c, \delta, \lambda, \mu>0$, $m_1=0, 1, 2, \ldots; m_2=0, 1, 2, \ldots,$

$$R\left[S+c\alpha'+\delta\beta'+\lambda\alpha''+\mu\frac{f'_o}{F'_o}\right]>0$$

$$R[S+c\alpha'''+\delta\beta'''+\mu\beta''']<0,$$

जहाँ

$$\alpha'=\min R(d_i/\delta_i),\ i=1, \ldots, m_2$$

$$\beta'=\min R(f_j/F_j),\ j=1, \ldots, m_3$$

$$\alpha''=\min R(d_i/\delta'_i),\ i=1. \ldots, M_2$$

$$\alpha'''=\max R\left(\frac{c_1-1}{\gamma_1}\right),\ i=1, \ldots, n_2$$

$$\beta'''=\max R\left(\frac{e_i-1}{E_j}\right), j=1, \ldots, n_3$$

$$\beta'''=\max R\left(\frac{e'_j-1}{E'_j}\right), j=1, \ldots, N_3.$$

निर्देश

1. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **प्रोसी० इंडि० एके० साइं०** अनुभाग A, 1973, 75, 1964, 117.
2. कौल, सी० एल०, **वही**, अनुभाग A, 1974, 79, 55-66.
3. डहिया, आर० एस०, **वही** 1371, 74(4), 167-171.
4. प्रसाद, वाई० एन० तथा एम० एस० डी०, **जर्न० प्योर एण्ड ऐप्लाइड मैथ०** (प्रकाशनाधीन)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No 3, July, 1975, Pages 269-273

अष्टि के रूप में H-फलन वाले समाकल समीकरण का व्युत्क्रमण

वी० सी० नायर
गणित विभाग, रीजनल इंजीनियरिंग कालेज, कालीकट (केरल)

[प्राप्त—दिसम्बर 17, 1974]

सारांश

प्रस्तुत पत्र का उद्देश्य अष्टि के रूप में H-फलन वाले संवलन प्रकार के समाकल समीकरण को सिद्ध करना है। इसके द्वारा हाल ही में जोशी द्वारा प्राप्त परिणाम का सार्वीकरण होता है। कतिपय अन्य रोचक विशिष्ट दशायें भी दी गई हैं।

Abstract

Inversion of an integral equation with an H-function as its kernel. *By* V. C. Nair, Mathematics Department, Regional Engineering College, Calicut (Kerala).

The object of this paper is to solve an integral equation of convolution form having an H-function as its kernel. It generalizes the result recently given by Joshi [4, p. 200]. A few other interesting special cases are also given.

1. परिभाषायें तथा प्रयुक्त परिणाम

यदि
$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt,\ Re(p)>0 \tag{1·1}$$

तो $F(p)$ को $f(t)$ का लैप्लास परिवर्त कहते हैं और इस सम्बन्ध को

$$F(p)\doteqdot f(t) \quad \text{या} \quad f(t)\doteqdot F(p).$$

के द्वारा अंकित किया जाता है।

एर्डेल्यी [1, pp. 129, 131]

$$e^{-at} f(t)\doteqdot F(p+a). \tag{1·2}$$

यदि $f(0)=f'(0)= \ldots =f^{(n-1)}(0)=0$ तथा $f^{(n)}(t)$ संतत है,

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) \tag{1·3}$$

यदि $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$ तथा $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$

तो
$$\int_0^t f_1(u) f_2(t-u)\, du \doteqdot F_1(p) F_2(p). \tag{1·4}$$

फाक्स [2, p. 408] ने H-फलन की परिभाषा दी है। H-फलन के लैप्लास परिवर्त को गुप्ता [3, p. 100] ने प्राप्त किया है। इस शोध पत्र में H-फलन के लैप्लास परिवर्त की निम्नांकित दशा का प्रयोग किया जावेगा।

$$t^h H_{2,1}^{1,1}\left[zt^{-k}\middle|\begin{matrix}(1-v, 1), (1+h, k)\\(0, 1)\end{matrix}\right] \doteqdot \Gamma(v)\, p^{-1-h}\, (1+zp^k)^{-v} \tag{1·5}$$

बशर्ते कि $Re(p)>0$, $2>k>0$, $Re(1+h+kv)>0$ तथा $|\arg zp^k| < \pi(2-k)/2$.

$\triangle(n, a)$ द्वारा n प्राचल $\frac{a}{n}, \frac{a+1}{n}, \ldots, \frac{a+n-1}{n}$ व्यक्त होते हैं।

जब $k=r/s$, जहाँ r तथा s धन पूर्णांक हैं, तो (1·5) के बाम पक्ष को G-फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$H_{2,1}^{1,1}\left[zt^{-r/s}\middle|\begin{matrix}(1-v, 1), (1+h, r/s)\\(0, 1)\end{matrix}\right]$$
$$= s^{v} r^{-(2h+1)/2} (2\pi)^{(1+r-2s)/2}\, G_{s,\, s+r}^{s,\, s}\left[\frac{t^r}{r^r z^s}\middle|\begin{matrix}\triangle(s, 1)\\\triangle(s, v), \triangle(r, -h)\end{matrix}\right] \tag{1·6}$$

एर्डेल्यी [1, pp. 375, 386]

$$G_{1,2}^{1,1}\left[x\middle|\begin{matrix}a\\b, c\end{matrix}\right] = \frac{\Gamma(1+b-a)}{\Gamma(1+b-c)}\, x^b\, {}_1F_1(1+b-a; 1+b-c; -x). \tag{1·7}$$

$$G_{1,2}^{2,1}\left[x\middle|\begin{matrix}a\\b, c\end{matrix}\right] = \Gamma(b-a+1)\Gamma(c-a+1) x^{(b+c-1)/2} e^{x/2} W_{a-(b+c+1)/2,\, (b-c)/2}(x). \tag{1·8}$$

$$M_{k,u}(z) = z^{u+1/2} e^{-z/2}\, {}_1F_1(\tfrac{1}{2}+u-k; 2u+1; z). \tag{1·9}$$

$$D_v(z) = 2^{(2v+1)/4} z^{-1/2} W_{(2v+1)/4,\, 1/4}(z^2/2). \tag{1·10}$$

2. मुख्य परिणाम

(1) $$g(t) = A\int_0^t [(D+a)^m f(t+u)]\, e^{-au} u^h\, H_{2,1}^{1,1}\left[zu^{-k}\middle|\begin{matrix}(1-v, 1), (1+h, k)\\(0, 1)\end{matrix}\right] du$$

तथा

(2) $$f(t) = B\int_0^t [(D+a)^n g(t-u)]\, e^{-au} u^{h'}\, H_{2,1}^{1,1}\left[zu^{-k}\middle|\begin{matrix}(1+v, 1), (1+h', k)\\(0, 1)\end{matrix}\right] du$$

में से प्रत्येक समाकल समीकरण दूसरे का हल है बशर्ते कि

(3) m तथा n अनृण पूर्णाङ्क हैं,

(4) $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(m-1)}(0)=0,\ f^{(m)}(u)$ संतत है,

(5) $g(0)=g'(0)=\ldots=g^{(n-1)}(0)=0,\ g^{(n)}(u)$ संतत है,

(6) $h'=m+n-h-2,$

(7) D द्वारा $t-u$ के प्रति अवकलन का बोध होता है

(8) $AB\Gamma(v)\Gamma(-v)=1,\ 2>k>0,\ Re(1+h+kv)>0$ तथा $Re(1+h'-kv)>0.$

उपपत्ति :

माना कि $f(t)\doteq F(p)$ तथा $g(t)\doteq G(p)$.

(1·2) के प्रयोग से (1·5) से निम्न फल प्राप्त होता है :

$$e^{-at}t^{h}H_{2,\,1}^{1,\,1}\left[zt^{-k}\left|\begin{matrix}(1-v,\,1),\,(1+h,\,k)\\(0,\,1)\end{matrix}\right.\right]\doteq(p+a)^{-1-h}[1+z(p+a)^{k}]^{-v}\Gamma(v).$$

फिर (1·3) तथा (1·4) के प्रयोग से समाकल समीकरण (1) से (9) प्राप्त होता है ।

(9) $G(p)=A(p+a)^{m-1-h}F(p)[1+z(p+a)^{k}]^{-v}\,\Gamma(v).$

इसी प्रकार समाकल समीकरण (2) से (10) प्राप्त होता है ।

(10) $F(p)=B(p+a)^{n-1-h'}\,G(p)[1+z(p+a)^{k}]^{v}\,\Gamma(-v).$

चूँकि (9) तथा (10) को एक दूसरे से निगमित किया जा सकता है

जब $$AB\Gamma(v)\Gamma(-v)=1 \text{ तथा } h'=m+n-h-2,$$

इसका यह अर्थ हुआ कि जब दिये हुये प्रतिबन्ध संतुष्ट हो जायँ तो समीकरण (1) तथा (2) एक दूसरे के हल हैं ।

3. विशिष्ट दशायें

माना कि $k=r/s$ जहाँ r तथा s धन पूर्णाङ्क हैं । फिर (1·6) के प्रयोग करने से (2·1) से निम्नांकित फल प्रप्त होता है जिसमें माइजर का G-फलन निहित है :

$$g(t)=A\int_0^t[D+a)^{m}f(t-u)]\,e^{-au}\,u^{h}\,G_{s,\,s+r}^{s,\,s}\left[zu^{r}\left|\begin{matrix}\triangle(s,\,1)\\\triangle(s,\,v),\,\triangle(r,\,-h)\end{matrix}\right.\right]du$$

तथा

$$f(t)=B\int_0^t [(D+a)^n g(t-u)]\, e^{-au}\, u^{h'}\, G^{s,\, s}_{s,\, s+r}\left[zu^r \middle| \begin{matrix} \triangle(s,\, 1) \\ \triangle(s,\, -v),\, \triangle(r,\, -h') \end{matrix} \right] du \tag{3·1}$$

में से प्रत्येक समाकल समीकरण एक दूसरे का हल है बशर्ते कि $r<2s$, $Re(1+h+rv/s)>0$, $Re(1+h'-rv/s)>0$, $AB\Gamma(v)\,\Gamma(-v)=(2\pi)^{1+r-2s}\, r^{1-m-n}$ तथा (2·1) के (3) से ले कर (7) तक के प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

जब $r=s=1$, तो (3·1) निम्नांकित रूप में (1·7 के प्रयोग करने पर) परिणत हो जाता है।

$$g(t)=A\int_0^t [(D+a)^m f(t-u)]\, e^{-au}\, u^h\, {}_1F_1(v;\, 1+h;\, zu)\, du$$

तथा

$$f(t)=B\int_0^t [(D+a)^n g(t-u)]\, e^{-au}\, u^{h'}\, {}_1F_1(-v;\, 1+h';\, zu)\, du \tag{3·2}$$

में से प्रत्येक समाकल समीकरण दूसरे का हल है बशर्ते कि $Re(1+h)>0$, $Re(1+h')>0$, $AB\Gamma(1+h)\,\Gamma(1+h')=1$ तथा (2·1) में (3) से (7) तक के प्रतिबन्ध तुष्ट होते हों।

$m=0$, $n=1$, $z=2a$, $A=(2a)^{\mu}$, $v=\mu+k$, $h=2\mu-1$ रखने पर तथा (1·9) के प्रयोग से (3·2) जोशी[4] द्वारा विवेचित समाकल समीकरण में समानीत हो जाता है। यहाँ पर संकेत करना उपयुक्त होगा कि सूत्र [4, p. 200(3·2)] में A का मान $(2a)^{1/2}\Gamma(2\mu)\Gamma(1-2)\mu$ होना चाहिए।

जब $r=1$, $s=2$, $h=h'=-1/2$, $m=0$, $n=1$, तो (1·3) तथा (1·10) के प्रयोग से (3·1) निम्नांकित में परिणत हो जाता है :

$$g(t)=A\int_0^t f(t-u)\, e^{u(z-2a)/2}\, u^{(v-1)/2}\, D_{-v}(\sqrt{2zu})\, du$$

तथा

$$f(t)=B\int_0^t [(D+a)\, g(t-u)]\, e^{u(z-2a)/2}\, u^{-(v+1)/2}\, D_v(\sqrt{(2zu)})\, du \tag{3·3}$$

में से प्रत्येक समीकरण दूसरे का हल है, बशर्ते कि $AB=1/\pi$, $|Re(v)|<1$, $g(0)=0$, D $(t-u)$ के प्रति अवकलन को बताता है और $f(t)$, $g'(t)$ संतत फलन हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक रीजनल इंजीनियरिंग कालेज, कालीकट के प्रिंसिपल का अत्यन्त आभारी है, जिन्होंने इस कार्य को सम्पन्न करने के लिये सुविधायें प्रदान कीं।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग I, **मैक-ग्राहिल**, 1954.
2. फाक्स, सी०, **ट्रांजे० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.
3. गुप्ता, के० सी०, Annals de la Societe Scientifique de Bruxelles, 1965, **T. 70**, II, 97-106.
4. जोशी, बी० के०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1973, **16**, 199-201.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No 3, July, 1975, Pages 275-279

माइजर के G-फलन तथा कैम्पे द फेरी फलन वाला सम्बन्ध

के० एस० सेवरिया
राजकीय महाविद्यालय, जैसलमेर (राजस्थान)

(प्राप्त—अप्रैल 1, 1975)

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य दो ज्ञात समाकलों के मानों की तुलना द्वारा माइजर के G-फलन तथा कैम्पे द फेरी फलन के मध्य सम्बन्ध स्थापित करना है।

Abstract

A relation involving Meijer's G-function and Kampé De Fériet function. *By* K. S. Sevaria, Government College, Jaisalmer (Rajasthan).

The object of this note is to establish a relation between Meijer's G-function and Kampé de Fériet function by comparing the values of two known integrals.

1. **विषय प्रवेश :** फलन $f(t)$ के लैप्लास परिवर्त को समाकल समीकरण

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है और सांकेतिक रूप में

$$\phi(p)\doteq f(t).$$

लिखा जाता है।

निम्नांकित सूत्र का प्रयोग किया जावेगा जिसे गोल्डस्टीन[4] ने लैप्लास परिवर्त के लिये दिया है और जो पार्सेवाल-गोल्डस्टीन प्रमेय के नाम से प्रसिद्ध है।

यदि $\qquad \phi(p)\doteq f(t)$

तथा $\qquad \psi(p)\doteq g(t),$

$$\int_0^\infty \phi(t)\, g(t)\, t^{-1}\, dt = \int_0^\infty \psi(t)\, f(t)\, t^{-1}\, dt. \tag{1}$$

2. निम्नांकित सम्बन्ध की स्थापना की जावेगी :

$$G^{35}_{66}\left(x^2 \middle/ \begin{matrix} \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\rho,\ \frac{3}{4}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\rho,\ \frac{5}{4}+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\rho,\ \frac{5}{4}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\rho,\ 1+\lambda,\ 1-\lambda \\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}-\mu,\ 1-\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2}\eta,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2}\eta \end{matrix}\right) \tag{2}$$

$$= \frac{\pi x^{1+2\mu}\, \Gamma(-2\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\rho+3\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\mu+\rho)\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)}{2^{\eta+\rho-2}\, \Gamma(1+2\mu)\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-\lambda)\Gamma(1-\eta+2\mu+\rho)}$$

$$\times F^{(6)}\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}+\rho+3\mu,\ \frac{1}{2}+\mu+\rho : \frac{1}{2}-\lambda+\mu,\ \frac{1}{2}-\lambda+\mu \\ 1-\eta+2\mu+\rho : 1+2\mu,\ 1+2\mu;\ x,\ -x \end{matrix}\right]$$

$$+ \frac{\pi x\Gamma(2\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\rho-\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\mu+\rho)\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)}{2^{\eta+\rho-2}\, \Gamma(1+2\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)\Gamma(1-\eta+\rho)}$$

$$\times F^{(6)}\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}+\rho-\mu,\ \frac{1}{2}+\rho+\mu : \frac{1}{2}-\lambda-\mu,\ \frac{1}{2}-\lambda+\mu \\ 1-\eta+\rho : 1-2\mu,\ 1+2\mu;\ x,\ -x \end{matrix}\right].$$

3. **उपपत्ति :**

[2, p. 213(8)] को

$$f(t) = t^{-k-\eta}(\gamma+t)^{k-\mu-1/2}(\beta+t)^{\eta-\mu-1/2}$$

$$\times {}_2F_1\left[\tfrac{1}{2}-k+\mu,\ \tfrac{1}{2}-\eta+\mu;\ 1-k-\eta;\ \frac{t(\beta+\gamma+t)}{(\beta+t)(\gamma+t)}\right] \tag{3}$$

$$\doteqdot \Gamma(1-k-\eta)(\beta\gamma)^{-1/2-\mu}\, e^{1/2(\beta+\gamma)p}\, W_{k,\,\mu}(\gamma p)\, W_{\eta,\,\mu}(\beta p)$$

$$= \phi(p),\ R(1-k-\eta) > 0,\ R(p) > 0,\ |\arg\beta| < \pi,\ |\arg\gamma| < \pi,$$

तथा [2, p. 215(11)] को लेने पर

$$g(t) = t^{\rho-1}\, e^{-(\beta+1/2\alpha)t}\, M_{\lambda,\,\nu}(\alpha t)$$

$$\doteqdot p\alpha^{\nu+1/2}\, \Gamma(\nu+\rho+\tfrac{1}{2})(p+\alpha+\beta)^{-\nu-\rho-1/2}$$

$$\times {}_2F_1\left[\nu+\rho+\tfrac{1}{2},\ \nu-\lambda+\tfrac{1}{2};\ 1+2\nu;\ \frac{\alpha}{(p+\alpha+\beta)}\right] \tag{4}$$

$$= \psi(p),\ R(\nu+\rho+\tfrac{1}{2}) > 0,\ R(p+\beta) > 0,\ R(p+\alpha+\beta) > 0.$$

पार्सेवाल-गोल्डस्टीन प्रमेय (1) में संक्रियात्मक युग्म (3) तथा (4) का व्यवहार करने पर तथा दाहिनी ओर ज्ञात फल [5, p. 226(2·2)] की सहायता से समाकल का मान ज्ञात करने पर

$$\int_0^\infty t^{-k-\eta}(\beta+t)^{\eta-\mu-1/2}(\gamma+t)^{k-\mu-1/2}(t+\alpha+\beta)^{-\nu-\rho-1/2}$$

$$\times {}_2F_1\left[\tfrac{1}{2}-k+\mu,\ \tfrac{1}{2}-\eta+\mu;\ 1-k-\eta;\ \frac{t(\beta+\gamma+t)}{(\beta+t)(\gamma+t)}\right]$$

$$\times {}_2F_1\left[\nu+\rho+\tfrac{1}{2},\ \nu-\lambda+\tfrac{1}{2};\ 1+2\nu; \frac{\alpha}{(t+\alpha+\beta)}\right] dt \tag{5}$$

$$=(\beta\gamma)^{-\mu} \sum_{\mu,\ -\mu} \frac{\gamma^{\mu}\ \Gamma(1-k-\eta)\Gamma(-2\mu)\Gamma(\tfrac{1}{2}+\nu+\rho+2\mu)}{\beta^{\mu+\nu+\rho+1/2}\ \Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu-k)\Gamma(1-\eta+\mu+\nu+\rho)}$$

$$\times F^{(6)}\left[\begin{matrix}\tfrac{1}{2}+\nu+\rho+2\mu,\ \tfrac{1}{2}+\nu+\rho\ :\ \tfrac{1}{2}-k+\mu,\ \tfrac{1}{2}+\lambda+\nu \\ 1-\eta+\mu+\nu+\rho\ :\ 2\mu+1,\ 2\nu+1\end{matrix} ;\frac{\gamma}{\beta},\ -\frac{\alpha}{\beta}\right],$$

$R(\alpha)>0$, $|\arg\gamma|<\pi$, $\max\{|\arg\beta|, |\arg(\alpha+\beta)|\}<\pi$, $R(-2\mu)>0$, $R(\nu+\rho+2\mu+\tfrac{1}{2})>0$, $R(1-k-\eta)>0$.

द्विगुण सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय श्रेणी [1, p. 150]

$$F^{(6)}\left[\begin{matrix}a,\ b\ :\ d,\ e \\ c\ :\ f,\ g\end{matrix} ;\ x,\ y\right]=\sum_{r=0}^{\infty}\ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_{r+s}\ (b)_{r+s}\ (d)_r\ (e)_s\ x^r y^s}{(c)_{r+s}\ (f)_r\ (g)_s\ r\,!\ s\,!}$$

उच्च कोटि के दो चरों वाले कैम्पे द फेरी के हाइपरज्यामितीय फलन की विशिष्ट दशा है और इसे कैम्पे द फेरी के नामकरण के अनुसार सांकेतिक रूप से निम्नलिखित प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$F\left[\begin{array}{c|cc|c} 2 & a, & b & \\ 1 & d, & e & \\ 1 & c & & x,\ y \\ 1 & f, & g & \end{array}\right].$$

λ को $-\lambda$ से प्रतिस्थापित करने तथा (5) में $\gamma=\alpha$, $k=\gamma$ और $\nu=\mu$ रखने पर

$$\int_0^{\infty} t^{-\lambda-\eta}\ (t+\alpha)^{\lambda-\mu-1/2}\ (t+\beta)^{\eta-\mu-1/2}\ (t+\alpha+\beta)^{-\mu-\rho-1/2}$$

$$\times {}_2F_1\left[\mu+\rho+\tfrac{1}{2},\ \mu+\lambda+\tfrac{1}{2};\ 1+2\mu; \frac{\alpha}{(t+\alpha+\beta)}\right]$$

$$\times {}_2F_1\left[\tfrac{1}{2}-\lambda+\mu,\ \tfrac{1}{2}-\eta+\mu;\ 1-\lambda-\eta; \frac{t(t+\alpha+\beta)}{(t+\alpha)(t+\beta)}\right] dt \tag{6}$$

$$=\frac{\Gamma(1-\lambda-\eta)\Gamma(-2\mu)\Gamma(\tfrac{1}{2}+\rho+3\mu)}{\beta^{1/2+\rho+\mu}\ \Gamma(\tfrac{1}{2}-\mu-\delta)\Gamma(1-\eta+2\mu+\rho)}$$

$$\times F^{(6)}\left[\begin{matrix}\tfrac{1}{2}+\rho+3\mu,\ \tfrac{1}{2}+\rho+\mu\ ;\ \tfrac{1}{2}-\lambda+\mu,\ \tfrac{1}{2}-\lambda+\mu \\ 1-\eta+2\mu+\rho\ :\ 1+2\mu,\ 1+2\mu\end{matrix} ;\frac{\alpha}{\beta},\ -\frac{\alpha}{\beta}\right]$$

$$+\frac{\Gamma(1-\lambda-\eta)\Gamma(2\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\rho-\mu)}{\alpha^{2\mu}\beta^{1/2+\mu+\rho}\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)\Gamma(1-\eta+\rho)}$$

$$\times F^{(6)}\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}+\rho-\mu, \frac{1}{2}+\rho+\mu : \frac{1}{2}-\lambda-\mu, \frac{1}{2}-\lambda+\mu \\ 1-\eta+\rho : 1-2\mu, 1+2\mu\end{matrix} ; \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}\right],$$

max $\{|\arg\alpha|, |\arg\beta|, |\arg(\alpha+\beta)|\}<\pi$, $R(-2\mu)>0$, $R(1-\eta-\mu)>0$, $R(\frac{1}{2}+\rho+3\mu)>0$. किन्तु मल्लू [6, p. 188(14)]* ने दिखाया है कि

$$\int_0^\infty t^{-\lambda-\eta}(t+\alpha)^{\lambda-\mu-1/2}(t+\beta)^{\eta-\mu-1/2}(t+\alpha+\beta)^{\mu-\rho-1/2}$$

$$\times {}_2F_1\left[\mu+\rho+\tfrac{1}{2}, \mu+\lambda+\tfrac{1}{2}; 1+2\mu: \frac{\alpha}{(t+\alpha+\beta)}\right]$$

$$\times {}_2F_1\left[\tfrac{1}{2}-\lambda+\mu, \tfrac{1}{2}-\eta+\mu: 1-\lambda-\eta; \frac{t(t+\alpha+\beta)}{(t+\alpha)(t+\beta)}\right]dt \tag{7}$$

$$=\frac{2^{\eta+\rho-2}\beta^{1/2-\rho-\mu}\Gamma(1-\eta-\lambda)\Gamma(1+2\mu)}{\pi\alpha^{1+2\mu}\Gamma(\frac{1}{2}+\mu+\rho)\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)}$$

$$\times G^{3,5}_{6,6}\left(\begin{matrix}\frac{3}{4}\pm\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\rho, \frac{5}{4}\pm\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\rho, 1+\lambda \\ \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\pm\mu, 1-\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2}\eta, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{2}\eta\end{matrix}\right),$$

$R(1-\eta-\lambda)>0$, $R(\frac{1}{2}+\rho+3\mu)>0$, $R(-2\mu)>0$, max $\{|\arg\alpha|, |\arg\beta|, |\arg(\alpha+\beta)|\}<\pi$.

(6) तथा (7) की तुलना करने पर तथा (α/β) को x द्वारा प्रतिस्थापित करने पर हमें (2) की प्राप्ति होती है।

विशिष्ट दशा :

(2) में $\eta=\frac{1}{2}+\mu$ रखने पर तथा [1. p. 151]

$$F\left(\begin{matrix}1 \\ 1 \\ 0 \\ 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\alpha \\ \beta, \beta' \\ \cdots \\ \delta, \delta'\end{matrix}\middle| x, y\right)=F_2(\alpha; \beta, \beta'; \delta, \delta'; x, y)$$

तथा [3, p. 209(7)] का उपयोग करने पर हमें (8) की प्राप्ति होती है।

*निर्देश [6] में उद्धृत परिणाम में कुछ त्रुटि प्रतीत होती है।

$$G^{33}_{44}\left(x^2 \middle/ \begin{matrix} \frac{3}{4}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\rho,\ \frac{5}{4}-\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\rho,\ 1+\lambda,\ 1-\lambda \\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}+\mu,\ \frac{1}{2}-\mu \end{matrix}\right)$$

$$=\frac{\pi x^{1+2\mu}\,\Gamma(-2\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\lambda)\Gamma(\frac{1}{2}+3\mu+\rho)}{2^{\rho+\mu-3/2}\,\Gamma(1+2\mu)\Gamma(\frac{1}{2}-\mu-\lambda)}$$

$$\times F_2\,[\tfrac{1}{2}+\rho+3\mu;\ \tfrac{1}{2}+\mu-\lambda,\ \tfrac{1}{2}+\mu-\lambda:\ 1+2\mu,\ 1+2\mu;\ x,\ -x]$$

$$+\frac{\pi x\,\Gamma(2\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\mu+\rho)}{2^{\rho+\mu-3/2}\,\Gamma(1+2\mu)}$$

$$\times F_2\,[\tfrac{1}{2}+\mu+\rho;\ \tfrac{1}{2}-\mu-\lambda,\ \tfrac{1}{2}+\mu-\lambda;\ 1-2\mu,\ 1+2\mu;\ x,\ -x]. \tag{8}$$

पुनश्च, (8) में $\lambda=\frac{1}{2}-\mu$ रखने पर तथा $\frac{1}{2}+\mu+\rho$ को 2ν द्वारा प्रतिस्थापित करने पर

$$G^{23}_{33}\left(x^2 \middle/ \begin{matrix} 1-\nu,\ \frac{3}{2}-\nu,\ \frac{3}{2}-\mu \\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{2}-\mu \end{matrix}\right)=\frac{\pi x\Gamma(2\mu)\Gamma(2\nu)}{2^{2\nu-2}\Gamma(1+2\mu)}\ {}_2F_1(2\nu,\ 2\mu;\ 1+2\mu;\ -x).$$

निर्देश

1. ऐपेल, पी० तथा कैम्पे, द, फेरी, Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques Polynomes D' hermite, गाथर विलर्स, पेरिस 1926.
2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Tables of Integral Transforms, भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1954.
3. वही, Higher Transcendental Functions, भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1953,
4. गोल्डस्टीन, एस०, प्रोसी० लन्दन मैथ० सोसा०, 1932, 34, 103-25.
5. कुलश्रेष्ठ, एस० के०, प्रोसी० नेश० एकेड० साइं० इंडिया० 1966, 36, 225-29.
6. मल्लू, एस० बी०, प्रोसी० नेश० एके० साइं० इंडिया, 1966, 36, 185-88.

विषय-सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 4, October, 1975, Pages, 281-288

मैंगनीज सल्फेट का मृदा के विभिन्न मैंगनीज प्रकारों एवं विनिमयशील फेरस लौह की उपलब्धता पर प्रभाव तथा उसका मृदा में अभिग्रहण और विमुक्तीकरण

शिवगोपाल मिश्र
रसायन विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय
तथा
श्याम सुन्दर त्रिपाठी
कृषि रसायन विभाग, ब्रह्मानन्द महाविद्यालय, राठ (हमीरपुर)

[प्राप्त—जुलाई 1, 1975]

सारांश

बुन्देलखण्ड क्षेत्र की मृदाओं में मैंगनीज सल्फेट मिला कर देखा गया कि मार (काली) मिट्टी को छोड़ कर शेष सभी मिट्टियों में जलविलेय मैंगनीज की मात्राओं में बृद्धि होती है। विनिमयशील मैंगनीज केवल पड़ुआ (लाल) मिट्टी में बढ़ता है किन्तु अन्य मिट्टियों में घटता है। विनिमयशील फेरस लौह सभी मिट्टियों में बढ़ता है। प्रयुक्त मैंगनीज की मात्रा में बृद्धि विनिमयशील मैंगनीज की मात्रा में बृद्धि करने में तो सहायक होती है किन्तु पड़ुआ (लाल) मिट्टी को छोड़ कर शेष मिट्टियों में फेरस लौह को अधिक मुक्त कराने में प्रभावशून्य रहती है। इनक्युबेशन अवधि बढ़ाने पर दोनों सूक्ष्ममात्रिक तत्वों की उपलब्धता घट जाती है। द्विसंयोजी लौह-मैंगनीज अनुपात (Fe^{++}/Mn^{++}) दोनों काली मिट्टियों में लाल मिट्टियों की अपेक्षा बढ़ता है। मैंगनीज आयनों की अधिकता फेरस लौह (Fe^{++}) को विनिमयशील रूप में आने में बाधक होती है। मृदा में मिलाये गये मैंगनीज सल्फेट के कारण विनिमयशील मैंगनीज (Mn^{++}) तथा लौह (Fe^{++}) दोनों ही पड़ुआ (लाल) मिट्टी में सबसे अधिक मुक्त होते हैं तथा मार (काली) मिट्टी में सबसे कम। इस प्रकार इन दोनों सूक्ष्ममात्रिक तत्वों का काली मिट्टी में सबसे अधिक अभिग्रहण तथा लाल मिट्टियों में अधिक विमुक्तीकरण होता है।

Abstract

Study on the release and fixation of applied $MnSO_4$ and its effect on various forms of soil manganese and exchangeable form of iron. *By* S. G. Misra, Department of Che-

mistry, Allahabad University and S. S. Tripathi, Department of Chemistry, B. N. V. Degree College, Rath, Hamirpur.

Addition of manganese as manganese sulphate to the soils of Bundelkhand region of Uttar Pradesh has been found to increase water-soluble manganese in all the soils except *Mar* soil where only increased doses of applied manganese sulphate could increase this form of manganese. Exchangeable manganese increases in *Parua* soil only; in other soils it decreases. Exchangeable iron (Fe^{++}) also increases in all the soils. Increase in the period of incubation led to a decrease in both the micronutrients. Fe^{++}/Mn^{++} ratio increases more in black soils than in red soils. Excess of manganese (Mn^{++}) ions interfered with the ferrous ions (Fe^{++}) to come into exchangeable form. Release of both exchangeable Mn^{++} and Fe^{++} is maximum in *Parua* soil and least in black soils. Thus fixation of both the nutrients is maximum in black soils and release in red soils.

मृदा में मिश्रित किये गये मैंगनीज सल्फेट का मृदा के मैंगनीज तथा लौह की उपलब्धता पर पड़ने वाले प्रभावों का बहुत से वैज्ञानिकों ने अध्ययन किया है। इप्सटीन तथा स्टाउट[1] ने बताया कि जड़ों से तने की ओर लौह के स्थानान्तरण में मैंगनीज बाधक होता है। जड़ों के द्वारा लौह का अधिशोषण मृत्तिका में लौह के सान्द्रण के साथ बढ़ता है। नेल्सन तथा एमसीइलोरी[2] ने देखा कि मृदा में मैंगनीज की अधिकता लौह का अभाव उत्पन्न करती है। सोमर तथा शिवे[3] ने प्रकट किया कि मृदा में इन दो में से किसी भी तत्व की अधिकता दूसरे तत्व की उपलब्धता को प्रभावित करती है।

प्रस्तुत अध्ययन हेतु उत्तरप्रदेश के बुन्देलखण्ड क्षेत्र (जिसके अन्तर्गत हमीरपुर, बाँदा, झाँसी, जालौन और ललितपुर जिले आते हैं) की मिट्टियाँ प्रयुक्त की गई हैं। इस क्षेत्र की मिट्टियाँ लाल-काली मिश्रित हैं तथा इनका स्थानीय नाम **पड़आ, रांकड़** (लाल मिट्टियाँ) तथा **मार, काबर** (काली मिट्टियाँ) है। इन मिट्टियों में मिश्रित किये गये मैंगनीज सल्फेट का मैंगनीज के अभिग्रहण, विमुक्तीकरण तथा मृदा में उपस्थित मैंगनीज और फेरस लौह पर पड़ने वाले प्रभावों का अभी तक किसी भी वैज्ञानिक ने अध्ययन नहीं किया है, अतः प्रस्तुत अध्ययन इसी दृष्टिकोण से किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन हेतु बुंदेलखण्ड के विभिन्न क्षेत्रों के चार मिट्टी के नमूने (काली तथा लाल मिट्टी समूह) खेतों से इकट्ठे करके, हवा में सुखाकर, पीसकर तथा 72 मि०मी० की छन्नी से छानकर काँच की बोतलों में संग्रहीत कर लिये गये। प्रत्येक मिट्टी के 50 ग्राम नमूने बीकर में लिये गये। चार बीकर की मिट्टियों में, जिनमें पड़ुआ, रांकड़, मार तथा काबर मिट्टियाँ पृथक-पृथक रखी थीं, 25 अंश प्रति दस लक्षांश Mn स्रवित जल में घुले मैंगनीज सल्फेट के रूप में डाला गया। इसी प्रकार अन्य चार मिट्टियों के नमूनों में इतना ही मैंगनीज डाला गया। समय समय पर स्रवित जल से इन्हें नम किया गया। 15, 30 तथा 60 दिन के अन्तर से इन नमूनों से 5 ग्राम मिट्टी निकाल कर इसमें जैक्सन[4] (1958)

की रंगमापी विधि द्वारा मृदा में उपस्थित मैंगनीज के विभिन्न प्रकारों का तथा फेरस लौह का आर्थो-फिनान्थ्रोलीन द्वारा परिमापन किया गया।

परिणाम

इन्क्युबेशन अध्ययन के लिये प्रयुक्त मृदाओं के गुण सारणी 1 में तथा मैंगनीज सल्फेट का मिट्टी के विभिन्न मैंगनीज प्रकारों और फेरस लौह की उपलब्धता पर पड़ने वाले प्रभावों को सारणी 2 में दिया गया है। सारणी 2 के अध्ययन से प्रकट है कि मृदा में मैंगनीज सल्फेट मिलाने पर जल विलेय मैंगनीज की मात्राओं में पहले वृद्धि होती है, किन्तु **मार** (काली) मिट्टी में 15 दिन बाद तथा अन्य मिट्टियों में 30 दिन बाद यह उपलब्धता पुनः शून्य हो जाती है। विनिमयशील मैंगनीज केवल **पड़ुआ** (लाल) मिट्टी में बढ़ता है जबकि अन्य मिट्टियों में घटता है। प्रयुक्त मैंगनीज सल्फेट की मात्रा में वृद्धि करने पर कुछ विनिमयशील मैंगनीज **मार** तथा **काबर** (काली) मिट्टियों में भी बढ़ता है जो समयान्तर पर पुनः घट जाता है। अपचेय मैंगनीज भी प्रारंभ में बढ़ता है; किन्तु 30 दिन बाद घटने लगता है; यहाँ तक कि **राँकड़** तथा **मार** मिट्टियों में शून्य तक पहुँच जाता है। सक्रिय मैंगनीज की मात्राओं में भी वृद्धि होती है लेकिन **मार** मिट्टी में प्रयुक्त मैंगनीज सल्फेट की मात्रा में द्विगुण वृद्धि करने पर ही सक्रिय मैंगनीज बढ़ता है। 30 दिन बाद सभी मिट्टियों में सक्रिय मैंगनीज की मात्रायें, **पड़ुआ** मिट्टी को छोड़कर, मूल मात्रा से भी नीचे पहुँच जाती हैं। मृदा में मैंगनीज सल्फेट मिलाने पर विनिमयशील (Fe^{++}) लौह सभी मिट्टियों में अधिक उपलब्ध होने लगता है; किन्तु 30 दिन बाद लाल मिट्टियों में तथा 15 दिन बाद काली मिट्टियों में उपलब्धता घटने लगती है जो मूल मात्राओं के स्तर से कम नहीं होती। प्रयुक्त मैंगनीज सल्फेट की मात्राओं में वृद्धि, पड़ुवा मिट्टी को छोड़कर शेष सभी मिट्टियों में, विनिमयशील लौह की उपलब्धता में वृद्धि लाने में प्रभावकारी नहीं होती।

विवेचना

मैंगनीज सल्फेट जल विलेय यौगिक है; जब इसे मिट्टी में मिलाया जाता है तो मैंगनीज आयन मृदा जटिल में विनिमयशील अवस्था में आ जाते हैं और मिट्टी में जल विलेय, विनमयशील तथा अपचेय मैंगनीज की मात्राओं में वृद्धि होती है। मृदा में डाले गये मैंगनीज सल्फेट से प्राप्त द्विसंयोजी मैंगनीज आयन (Mn^{++}) मृदा के जटिल कोलाइड में से फेरस (Fe^{++}) आयनों को विस्थापित करते हैं, अतः मैंगनीज सल्फेट मिलाने पर फेरस लौह की उपलब्धता में वृद्धि स्वाभाविक है; किन्तु अधिक मैंगनीज आयन (Mn^{++}) फेरस (Fe^{++}) आयनों की उपलब्धता को घटाते हैं। संभवतः यह मैंगनीज आयनों की आक्सीकारक प्रकृति के कारण होता है। यही कारण है कि मैंगनीज सल्फेट की मात्रा में वृद्धि करने पर फेरस लौह की मात्रा घट जाती है। नेसन तथा एमसीइलोरी[4] ने भी देखा कि मैंगनीज की अधिकता से मृदा में लौह के अभाव की स्थिति उपस्थित हो जाती है। मृदा में मैंगनीज सल्फेट मिलाने पर मैंगनीज आयनों (Mn^{++}) का अभिग्रहण तथा फेरस आयनों का विमुक्तीकरण अधिक होता है अतः सभी मिट्टियों में द्विसंयोजी लौह : मैंगनीज (Fe^{++}/Mn^{++}) अनुपात में भी वृद्धि होती है। काली मिट्टियों में यह वृद्धि अधिक देखी जाती है। अधिक द्विसंयोजी मैंगनीज के कारण फेरस लौह की मात्रायें घटने लगती हैं अतः (Fe^{++}/Mn^{++}) अनुपात भी घट जाता है। मृदा में मैंगनीज सल्फेट मिलाने पर

सारणी 1

अध्ययन में प्रयुक्त मृदाओं की रासायनिक विशेषतायें

मिट्टियाँ		पी-एच मान	कार्बनिक कार्बन %	कैल्सियम कार्बोनेट %	विनिमयशील Ca^{++} me/100 ग्राम मृदा	धनायन विनिमय क्षमता me/100 ग्राम	मैंगनीज के विभिन्न प्रकार (अंश प्रति दस लक्षांश)				लौह अंश प्रति दस लक्षांश		फेरस लौह Fe^{++}/ द्विसंयोजी मैंगनीज Mn^{++}
							जल विलेय	विनिमयशील	अपचेय	सक्रिय	Fe^{++} HCl विलेय	विनिमयशील Fe^{++}	
लाल	पड़ुवा	7·8	0·204	1·275	7·85	10·85	00	8	105	113	7	3	0·375
	रांकड़	7·9	0·34	0·85	11·54	11·6	00	22	162	184	7	4	0·1818
काली	मार	7·8	0·64	0·75	29·6	31·2	00	20	265	185	22	3·5	0·175
	काबर	8·1	0·904	1·655	21·5	28·75	00	20	200	220	7	3	0·20

सारणी 2

बुन्देलखण्ड की मृदाओं में लौह तथा मैंगनीज की उपलब्धता पर मैंगनीज सल्फेट का प्रभाव

मिट्टियों में मिलाई गई मैंगनीज सल्फेट की मात्रायें	मैंगनीज के विभिन्न प्रकार (अंश प्रति दस लक्षांश) जल विलेय			विनिमयशील			अपचेय			सक्रिय			विनिमयशील फेरस (Fe^{++}) लौह अंश प्रति दस लक्षांश			Fe^{++}/Mn^{++} अनुपात		
अंश दश लक्षांश दिन	15	30	60	15	30	60	15	30	60	15	30	60	15	30	60	15	30	60
पड़ुवा																		
मूल मिट्टी	0	0	0	8	8	8	105	105	105	113	113	113	3	3	3	·375	·375	·375
+25 अंश मैंगनीज	24	11	0	24	24	18	125	137	125	173	172	143	20	20	7	·833	·833	·833
+50 अंश मैंगनीज	30	7·5	0	30	30	24	157	170	111	217	207·5	135	25	25	13	·833	·833	·541
रांकड़																		
मूल मिट्टी	0	0	0	22	22	22	162	162	162	184	184	184	4	4	4	·181	·181	·181
+25 अंश मैंगनीज	32	5	0	17·5	20·5	11	185	187	115	234·5	213	126	22	35	5	1·257	1·214	·454
+50 अंश मैंगनीज	36	11	0	11	11	30	182·5	185	113	229·5	207	143	20	25	14·5	1·818	2·272	·41
मार																		
मूल मिट्टी	0	0	0	20	20	20	265	265	265	285	285	285	3·5	3·5	3·5	·175	·175	·175
+25 अंश मैंगनीज	0	0	0	11	11	30	255	253	248	266	264	274	25	7·5	11	2·272	·681	·366
+50 अंश मैंगनीज	17·5	0	0	26	11	24	280	291·5	248	323·5	302·5	272	20	5	13·5	·769	·454	·562
काबर																		
मूल मिट्टी	0	0	0	20	20	20	200	200	200	220	220	220	4	4	4	·2	·2	·2
+25 अंश मैंगनीज	24	11	0	11	11	7·5	200	210	175	235	232	183	22·5	12·5	10	2·045	1·136	1·33
+50 अंश मैंगनीज	24	17·5	0	14	24	7·5	247·5	280	213	285·5	321·5	220·5	21·5	15	11	1·535	·625	·466

सारणी 3

मृदा में डाले गये मैंगनीज सल्फेट का मैंगनीज के विभिन्न प्रकारों में वितरण तथा स्थिरीकरण (सारणी 2 के आधार पर)

मिट्टियों में डाली गई मैंगनीज की मात्रायें	प्रयुक्त मैंगनीज की मात्रा जो उपलब्ध (जलविलेय+विनिमयशील) मैंगनीज में परिवर्तित हुई (अंश प्रति दस लक्षांश)			प्रयुक्त मैंगनीज की मात्रा जो अपचेय मैंगनीज में परिवर्तित हुई (अंश प्रति दस लक्षांश)			प्रयुक्त मैंगनीज की मात्रा जो निष्क्रिय रूप में परिवर्तित हुई या स्थिर हुई (अंश प्रति दस लक्षांश)		
दिन	15	30	60	15	30	60	15	30	60
पड़ुवा मिट्टी									
25 अंश प्रति दस लक्षांश	25+15 अति.	25+2 अति.	10+0	0+20 अति.	0+32 अति.	15+5 अति.	शून्य, बृ. 35	शून्य, बृ. 40	शून्य, बृ. 5
50 अंश प्रति दस लक्षांश	50+2 अति.	29·5	16	0+52 अति.	20·5+40 अति.	6	शून्य, बृ. 54	शून्य, बृ. 40	28 या 46%
रांकड़ मिट्टी									
25 अंश प्रति दस लक्षांश	25+2·5 अति.	3·5	0, −11	0+23 अति.	21·5+3·5 अति.	0, −47	शून्य, बृ. 25·5	शून्य, बृ. 7	83 या 166%
50 अंश प्रति दस लक्षांश	25	0	8	20·5	23	0, −49	4·5 या 9%	27 या 54%	91 या 182%
मार मिट्टी									
25 अंश प्रति दस लक्षांश	0, −9	0, −9	10	0, −10	0, −12	0, −17	34 या 136%	36 या 144%	32 या 128%
50 अंश प्रति दस लक्षांश	23·5	0, −9	4	15	26·5	0, −17	11·5 या 23%	32·5 या 65%	60 या 128%
काबर मिट्टी									
25 अंश प्रति दस लक्षांश	15	2	0, −12	0	10	0, −24	10 या 40%	13 या 52%	63 या 246%
50 अंश प्रति दस लक्षांश	18	21·5	0, −12·5	32+15·5 अति.	27·5+52·5 अति.	13	शून्य, बृ. 15·5	शून्य, बृ. 101·5	62·5 या 125%

नोट—ऋणात्मक संख्या (−) मूल मात्रा में कमी प्रदर्शित करती है, बृ० = मूल मात्रा से ऊपर बृद्धि, अति. = अतिरिक्त

फेरस लौह की उपलब्धता पड़ुवा मिट्टी में मूल उपलब्धता की अपेक्षा 7·22 गुनी तक बढ़ जाती है तथा विनिमयशील मैंगनीज 3·12 गुना तक बढ़ जाता है। अन्य मिट्टियों में फेरस लौह तो बढ़ता है किन्तु मैंगनीज घटता है।

यदि प्रयुक्त किये गये मैंगनीज सल्फेट को वितरण तथा अभिग्रहण की दृष्टि से देखा जाय तो सारणी 3 से स्पष्ट है कि प्रयुक्त मैंगनीज सल्फेट का अधिकांश भाग पड़ुवा मिट्टी में उपलब्ध मैंगनीज (जलविलेय+विनिमयशील मैंगनीज) में बदल जाता है; यहाँ तक कि यह मृदा के कुछ निष्क्रिय मैंगनीज को भी सक्रिय तथा उपलब्ध या प्राप्य रूप में ला देता है। इसीलिये मिट्टी में मैंगनीज सल्फेट मिलाने पर उपलब्ध तथा अपचेय मैंगनीज की मात्राओं में वृद्धि देखी जाती है। इसी प्रकार का प्रेक्षण राँकड़ मिट्टी में भी देखा जाता है। लेकिन यहाँ 30 दिन बाद मैंगनीज का अभिग्रहण होने लगता है।

काली मिट्टियों में प्रयुक्त किये गये मैंगनीज सल्फेट का आचरण इससे भिन्न ही देखा जाता है। मार (काली चूना युक्त) मिट्टी में मैंगनीज सल्फेट पूर्ण रूप से अभिग्रहीत कर लिया जाता है। यह स्थिर मैंगनीज अप्राप्य या अनुपलब्ध हो जाता है; यहाँ तक कि मृदा में मूल रूप में उपस्थित उपलब्ध मैंगनीज भी अंशतः अनुपलब्ध हो जाता है; केवल प्रयुक्त मैंगनीज सल्फेट की उच्च मात्रायें (50 अंश प्रति दस लक्षांश) ही उपलब्ध तथा अपचेय मैंगनीज की मात्रायें बढ़ाने में सफल होती हैं और समयान्तर में वह भी घट जाती हैं। काबर (काली, मृत्तिका युक्त मिट्टी) में प्रयुक्त किये गये मैंगनीज सल्फेट का लगभग 60 प्रतिशत उपलब्ध होता है तथा शेष स्थिर या अभिग्रहीत हो जाता है। इनक्युबेशन अवधि बढ़ाने के साथ-साथ अभिग्रहीत Mn की मात्रा भी बढ़ती जाती है, यहाँ तक कि 30 दिन बाद प्रयुक्त किये गये मैंगनीज सल्फेट का शत प्रतिशत तथा मूल मृदा में उपस्थित उपलब्ध मैंगनीज (जल विलेय विनमयशील) का 6. प्रतिशत स्थिर हो जाता है। मैंगनीज सल्फेट की उच्च मात्रायें (50 अंश प्रति दस लक्षांश) प्रयुक्त करने पर अभिग्रहीत Mn कम हो जाता है और 36 प्रतिशत तक मैंगनीज उपलब्ध होने लगता है और शेष अपचेय मैंगनीज के रूप में बदल जाता है यद्यपि 30 दिन बाद यह भी शत-प्रतिशत स्थिर हो जाता है।

मृदाओं में प्रयुक्त किये गये मैंगनीज सल्फेट का उपलब्ध हो जाना या अभिग्रहीत हो जाना मृदा के भौतिक तथा रासायनिक गुणों पर आधारित है। लाल मिट्टी भुरभुरी, खुली रचना वाली तथा 8 से कम पी-एच वाली है; अतः इन मिट्टियों में मैंगनीज तथा लोह दोनों का स्थिरीकरण कम होता है। रांकड़ (लाल) मिट्टी में कैल्सियम कार्बोनेट (कंकड़) अधिक होता है। यह कैल्सियम कार्बोनेट मैंगनीज को या तो मैंगनीज हाइड्राक्साइड $Mn(OH)_2$ के रूप में अवक्षिप्त कर देता है या कैल्सियम कार्बोनेट के कैल्सियम (Ca^{++}) आयन मैंगनीज (Mn^{++}) आयनों को विनमयशील अवस्था में आने से रोकते हैं अतः रांकड़ मिट्टी में कालान्तर में मैंगनीज सल्फेट स्थिर होने लगता है। काली मिट्टियाँ अधिक मृत्तिका युक्त तथा 8 या इससे अधिक पी-एच वालीहोती हैं। कार्बनिक पदार्थ भी अन्य मिट्टियों को अपेक्षा अधिक है। साथ ही इनमें कैल्सियम कार्बोनेट (कंकड़) भी पाया जाता है। प्रयुक्त मैंगनीज सल्फेट का Mn^{++} कार्बनिक पदार्थ, मृत्तिका तथा कैल्सियम कार्बोनेट के साथ अविलेय

जटिल बना देता है जिससे मैंगनीज अनुपलब्ध हो जाता है। कैल्सियम आयनों की अधिकता भी मैंगनीज को विनिमयशील तथा उपलब्ध अवस्था में आने से रोकती है। यह प्रेक्षण मिश्रा तथा मिश्रा[5] के प्रेक्षण से भिन्न है जिन्होंने पाया कि बलिया, मिर्जापुर तथा इलाहाबाद जिलों की काली, लाल तथा ऊसर मिट्टियों में मैंगनीज सल्फेट मिलाने से विनिमयशील मैंगनीज की मात्राओं में बृद्धि होती है।

निष्कर्षतः यह कहा जा सकता है कि लाल मिट्टियों (मुख्यतः पड़ुवा) में डाले गये मैंगनीज सल्फेट के कारण मैंगनीज की उपलब्धता में बृद्धि होती है, यहाँ तक कि मृदा में मूलतः उपस्थित अनुपलब्ध तथा निष्क्रिय मैंगनीज भी उपलब्ध तथा सक्रिय रूप में बदल जाता है। काली मिट्टियों में डाला गया मैंगनीज सल्फेट अधिकांशतः स्थिर तथा निष्क्रिय हो जाता है, यहाँ तक कि मृदा में मूलतः उपस्थित विनिमयशील तथा अपचेय मैंगनीज भी घट जाता है। इसके विपरीत मिट्टियों में मैंगनीज सल्फेट मिलाने से फेरस लौह (Fe^{++}) की उपलब्धता बढ़ जाती है; यद्यपि दोनों ही पोषक तत्व कालान्तर में स्थिर तथा कम उपलब्ध होने लगते हैं।

निर्देश

1. इप्स्टीन, ई० तथा स्टाउट, पी० आर०, **स्वायल साइं०** 1951, **72**, 47-65.
2. नेसन, ए० तथा एमसी इलोरी, डब्ल्यू० डी०, **प्लान्ट फिजियो०**1968, **111**, **एकेडेमिक प्रेस**, **इन्क० न्यूयार्क।**
3. सोमर, आई० आई० तथा शिव, जे० डब्ल्यू०, **प्लान्ट फिजियो०** 1942, **17**, 582-602.
4. जैक्सन, एम० एल०, **केमिकल एनालिसिस**, **प्रेन्टिस होल, इन्गल वुड फिलिप्स एम० जे०**, 1958, 495.
5. मिश्रा, एस०जी० तथा मिश्रा, पी० सी०, **जर्न० इण्डि० सोसा० स्वा० साइं०** 1970, **18**, 2

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 4, October, 1975, Pages 289-295

N-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेट-ऐनिलाइड के पुनर्विन्यास पर आयनिक तीव्रता का प्रभाव-1

एम० एम० म्हाला
रसायन विभाग, जीवाजी विश्वविद्यालय, ग्वालियर
एम० डी० पटवर्धन, एस० डी० शर्मा तथा बी० के० गुप्ता
रसायन विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, शिवपुरी

[प्राप्त—सितम्बर 6, 1975]

सारांश

N-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेट-ऐनिलाइड के पुनर्विन्यास के दर स्थिरांक हाइड्रोक्लोरिक एवं सल्फ्यूरिक अम्ल की सान्द्रता के बढ़ाने से बढ़ते हैं। आयनिक तीव्रता का प्रभाव इस अभिक्रिया में अम्ल उत्प्रेरित एवं उदासीन दरों के योगदान एवं ऋणात्मक लवण प्रभाव की सूचना देता है। डेबाइ-हुकेल समीकरण का उपयोग अम्ल उत्प्रेरित एवं उदासीन दरों का परिकलन करने हेतु किया गया है। जुकर-हेमेट परिकल्पना तथा आर्हेनियस प्राचल इस अभिक्रिया की द्विक्-अणुकता को आधार देते हैं। बुनेट प्राचल भी इस अभिक्रिया की द्विक्-अणुकता एवं अभिक्रिया की जल सक्रियता पर निर्भरता बताता है। अम्ल उप्रेरक एवं उदासीन पुनर्विन्यास के लिये जलीय माध्यम में क्रियाविधि प्रस्तावित की गई है।

Abstract

Effect of ionic strength on the rearrangement of N-chloro p-nitro acetanilide. Part I. *By* M. M. Mhala, Department of Chemistry, Jiwaji University, Gwalior and M. D. Patwardhan, S. D. Sharma, and B. K. Gupta, Department of Chemistry, Government Postgraduate College, Shivpuri.

The rate co-efficients for the rearrangement of *N*-chloro *p*-nitro acetanilide in hydrochloric and sulphuric acids increase with increase in acid concentration. Ionic strength effect indicates contribution of acid catalysed and neutral rates and negative salt effect. The use of Debye-Huckel equation has been made to calculate the acid

catalysed and neutral rates. Zucker-Hammett hypothesis and Arrhenius parameters indicate the bimolecular nature of reaction. Bunnett parameters show the bimolecular nature of reaction and dependence of rates on water activity. A mechanism for acid catalysed and neutral rearrangement in aqueous medium has been suggested.

N-क्लोरो ऐसेट-ऐनिलाइड का हाइड्रोक्लोरिक अम्ल की उपस्थिति में जलीय एवं निर्जलीय माध्यम में पुनर्विन्यास होता है और नाइट्रोजन से क्लोरीन का अभिगमन बेंजीन नाभिक में होकर आर्थो तथा पैरा क्लोरो ऐसेट-एनिलाइड का मिश्रण प्राप्त होता है।[1] कुछ प्रतिस्थापित *N*-क्लोरो ऐसेट-ऐनिलाइड के 99% ऐसीटिक अम्ल में पुनर्विन्यास से नाभिकी प्रतिस्थापित क्लोरो ऐसेट-ऐनिलाइड बनते हैं।[2] *N*-क्लोरो-ऐनिलाइड तथा उसके आर्थो क्लोरो एवं आर्थो मेथिल व्युत्पन्नों पर आयन तीव्रताओं के प्रभाव से अम्ल उत्प्रेरण की प्रभाविता का क्रम *N*-क्लोरो[3]> आर्थो-मेथिल[3]> आर्थो क्लोरो[4] पाया गया यद्यपि उसके प्रेक्षित विशिष्ट अम्ल उत्प्रेरित दरों में उपेक्षणीय अन्तर है। *N*-क्लोरो ऐसेट-एनिलाइड में पैरा स्थिति में नाइट्रो समूह का ऋणात्मक प्रेरक स्वभाव अम्ल उत्प्रेरण की प्रवृत्ति को प्रभावित कर सकता है। उपलब्ध साहित्य के आधार पर इस सम्बन्ध में कोई अध्ययन किया गया प्रतीत नहीं होता। इस प्रपत्र में *N*-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेट-ऐनिलाइड के पुनर्विन्यास पर विस्तृत अध्ययन के परिणामों का विवेचन किया गया है।

प्रयोगात्मक

सामग्री एवं विधियाँ : *N*-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेट-ऐनिलाइड को पैरा नाइट्रो ऐसेट-ऐनिलाइड एवं सोडियम हाइपोक्लोराइट से बनाया गया एवं उसका पुनः क्रिस्टलन लाइट पेट्रोलियम (40°–60°) एवं क्लोरोफार्म से किया गया[5]।

गलनांक 92–93°, प्रेक्षित सक्रिय % क्लोरीन 16·48, परिकलित % क्लोरीन 16·55

प्रक्रिया : पुनर्विन्यास की दरों को 30°±00·5° पर पूर्वसूचित विधि के अनुसार निकाला गया[5]। यौगिक की सान्द्रता 0·0005*M* रखी गयी। हाइड्रोक्लोरिक अम्ल-सोडियम क्लोराइड, सल्फ्यूरिक अम्ल-सोडियम सल्फेट, एवं हाइड्रोक्लोरिक अम्ल-लिथियम क्लोराइड से आयनिक तीव्रताओं को स्थिर रखा गया[6]। समस्त कार्य में रासायनिक द्रव्य बी० डी० एच० श्रेणी के उपयोग में लाये गये।

परिणाम तथा विवेचना

N-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेट-ऐनिलाइड के पुनर्विन्यास के दर स्थिरांक 20–80% ऐसीटिक अम्ल-जल माध्यम में हाइड्रोक्लोरिक एवं सल्फ्यूरिक अम्लों की सान्द्रता में वृद्धि के साथ बढ़ते हैं। सल्फ्यूरिक अम्ल में पुनर्विन्यास की दरें कम पाई गईं (सारणी 1)। अम्लों की सान्द्रता में वृद्धि के साथ दरों के बढ़ने का कारण अम्ल उत्प्रेरण है। इस अम्ल उत्प्रेरण की प्रवृत्ति को ज्ञात करने के लिये आयनिक-तीव्रताओं के प्रभाव का अध्ययन हाइड्रोक्लोरिक अम्ल-सोडियम क्लोराइड, सल्फ्यूरिक अम्ल-

सोडियम सल्फेट तथा हाइड्रोक्लोरिक अम्ल-लिथियम क्लोराइड में विभिन्न आयनिक तीव्रताओं पर किया गया[6] । सारणी 2 में विभिन्न आयनिक तीव्रताओं पर प्राप्त पुर्नविन्यास के दर स्थिरांक दिखाये गये हैं ।

सारणी 1

N-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेट-ऐनिलाइड का हाइड्रोक्लोरिक तथा सल्फ्यूरिक अम्ल में क्रमशः 30° और 40° पर पुर्नविन्यास

[M] HCl	प्रेक्षित 10K सेकंड$^{-1}$	परिकलित 1		परिकलित 2		प्रेक्षित 3		परिकलित	
		अम्ल उत्प्रेरित	उदासीन	अम्ल उत्प्रेरित	उदासीन	[M] H_2SO_4	10K सेकंड$^{-1}$	अम्ल उत्प्रेरित	उदासीन
0·1	2·3	·43	2·8	·81	2·4	0·1	·31	·12	·17
0·5	3·1	1·2	3·0	2·0	2·5	0·5	1·12	·53	·15
0·5	4·8	1·9	3·16	2·8	2·7	1·0	3·3	·87	·22
1·0	6·4	3·2	3·5	3·5	3·0	1·5	3·9	1·0	·12
1·5	11·2	4·1	3·9	3·3	3·3	2·0	5·2	1·15	·11
2·0	16·5	4·6	4·4	2·8	3·8	2·5	7·5	1·16	·10
2·5	23·6	4·9	5·0	2·2	4·2	3·0	10·5	1·14	·09
3·0	27·9	5·0	5·6	1·6	4·7	3·5	15·2	1·08	·08
3·5	29·4	5·0	6·3	1·23	5·3	4·0	18·4	1·00	·07

1—हाइड्रोक्लोरिक अम्ल-सोडियम क्लोराइड

2—हाइड्रोक्लोरिक अम्ल-लिथियम क्लोराइड

3—सल्फ्यूरिक अम्ल-सोडियम सल्फेट

$E=13{\cdot}7$ कि० कै०/मोल, $\Delta S^{\neq}=-30{\cdot}9$ *e. u.* $A=2{\cdot}9\times10^{6}$ सेकंड$^{-1}$

आयनिक तीव्रताओं के आँकडों से निम्नलिखित निष्कर्ष निकाले गये ।

(आ) प्रत्येक आयनिक तीव्रता पर अम्ल की सान्द्रता में वृद्धि के साथ पुर्नविन्यास की दरों का बढ़ना अम्ल उत्प्रेरित दरों का आयनिक तीव्रता के प्रभाव पर निर्भरता बताता है ।

(ब) अम्ल उत्प्रेरित दरें धनात्मक लवण प्रभाव को ग्रहण करने की योग्यता नहीं रखतीं क्योंकि आयनकि तीव्रता के साथ वक्रों के ढालों में कमी होती है ।

(इ) प्रत्येक आयनिक तीव्रता वाली रेखाओं का दर अक्ष पर पृथक-पृथक स्थान पर मिलना इस अभिक्रिया में उदासीन दरों का योगदान एवं उन पर आयनिक तीव्रता का प्रभाव दर्शाता है। इस प्रकार पुनर्विन्यास की अभिक्रिया में अम्ल उत्प्रेरित एवं उदासीन दरों का योगदान होता है। सम्पूर्ण अभिक्रिया को डेवाइ-हुकेल समीकरण के आधार पर निम्नलिखित समीकरण द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं[7]।

$$K_e = KH_0 . eb\ \mu . CH^+ + KN_0 . eb\ \mu$$

उक्त समीकरण में Ke . KH_0 . KN_0 . b एवं μ क्रमशः परिकलित दर, शून्य आयनिक तीव्रता पर विशिष्ट अम्ल उत्प्रेरित दर, शून्य आयनिक तीव्रता पर विशिष्ट उदासीन दर, ढाल तथा आयनिक तीव्रता हैं। उक्त समीकरण के द्वारा प्रत्येक अम्ल की सान्द्रता पर उदासीन एवं अम्ल उत्प्रेरित दरों का परिकलन किया गया (सारणी 1)। हाइड्रोक्लोरिक अम्ल-लिथियम क्लोराइड तथा हाइड्रोक्लोरिक अम्ल-सोडियम क्लोराइड में परिकलित दरों का योग केवल 0·1—1*M* परास में ही प्रयोग में प्रेक्षित दरों के अनुकूल है। सल्फ्यूरिक अम्ल में परिकलित दरें किसी भी अम्ल की सान्द्रता पर प्रयोग में प्रेक्षित दरों के अनुकूल नहीं हैं (सारणी 1) और प्रेक्षित दरों से कम हैं। इसका कारण सम्भवतः उदासीन दरों एवं उत्प्रेरित दरों पर ऋणात्मक लवण प्रभाव का होना है। जुकर-हेमेट[8] परिकल्पना के आधार पर यह अभिक्रिया द्वि-अणुक प्रतीत होती है क्योंकि लॉग अम्लीयता (हाइड्रोक्लोरिक अम्ल) तथा लॉग दरों में खींचे गये आलेख का ढलान एक है। सल्फ्यूरिक अम्ल के साथ यह ढलान लगभग एक (0·87) है, ढलान में कमी का कारण सम्भवतः ऋणात्मक लवण-प्रभाव है।

सारणी 2

N-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेट-ऐनिलाइड का स्थिर आयनिक सामर्थ्यों पर पुनर्विन्यास

NaCl	10^4K सेकंड$^{-1}$	LiCl	10^4K सेकंड$^{-1}$	Na_2SO_4	10^4K सेकंड$^{-1}$
(M) HCl ·5 μ		(M) HCl ·5 μ		(M) H_2SO_4 ·5 μ	
0·1	2·80	0·1	3·20	0·1	0·24
0·3	3·41	0·3	4·93	0·3	0·46
0·4	4·19	0·4	5·67	0·4	0·83
1·0 μ		1·0 μ		1·0 μ	
0·1	2·79	0·1	3·10	0·1	0·25
0·3	4·19	0·3	4·82	0·3	0·30
0·5	4·45	0·5	5·63	0·5	0·73
0·8	5·87				
2·0 μ		2·0 μ		2·0 μ	
0·1	3·33	0·1	3·34	0·1	0·15
0·5	5·08	1·0	5·66	0·5	0·75
1·0	5·96	1·5	6·29	1·0	1·00
1·5	7·53				

कुछ धनायनों की उपस्थिति में पुनर्विन्यास की दरें उनकी आयनी त्रिज्याओं में वृद्धि के क्रमानुसार बढ़ती हैं जो इस अभिक्रिया पर विशिष्ट लवण प्रभाव दर्शाती हैं[9] (सारणी 3)। सम्भवतः इसका कारण धनायन और N-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेट-ऐनिलाइड के ऋणात्मक नाइट्रोजन के बीच स्थिरवैद्युत आकर्षण का होना है जो नाइट्रोजन की ऋणात्मकता को कम करता है और यह प्रभाव आवेश घनत्व के कम होने के साथ अर्थात् आयनिक त्रिज्याओं के बढ़ने के साथ घटता है।

सारणी 3

N-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेट-ऐनिलाइड के पुनर्विन्यास पर धनायनों का प्रभाव 30° पर

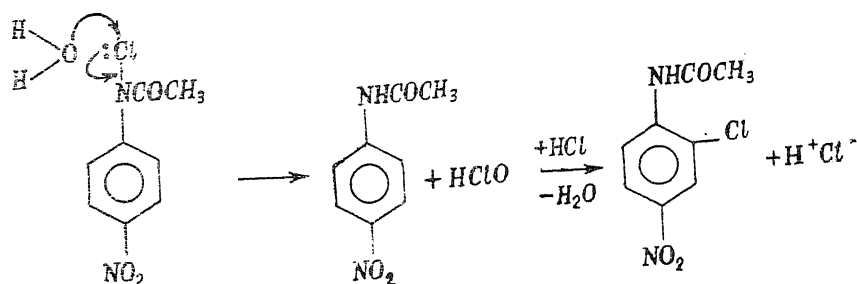
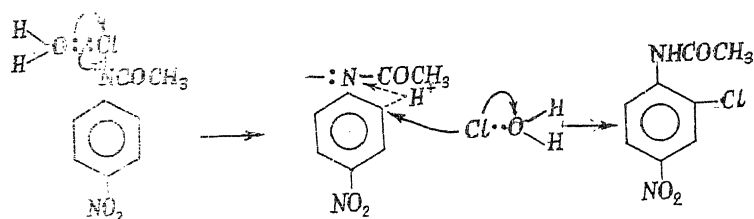
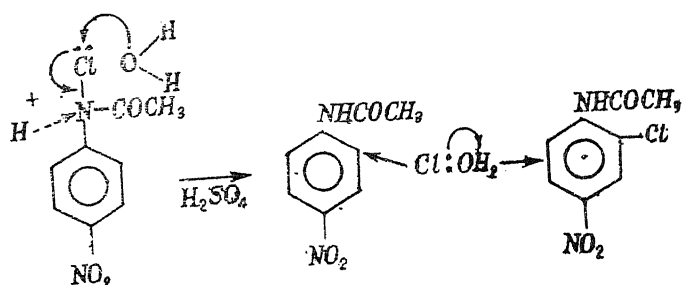
धनायन	LiCl	NaCl	KCl
10^4K सेंकड$^{-1}$	1·18	2·73	15·18

बुनेट के प्राचल[10] के अनुसार दर स्थिरांकों के लॉग $+H_0$ तथा लॉग जल सक्रियता के आलेख के ढाल द्विकअणुकता एवं अभिक्रिया की जल सक्रियता पर निर्भरता बताते हैं। उच्च ऋणात्मक एन्ट्रॉपी एवं आवृति गुणक (सारणी 1) भी अभिक्रिया की द्विकअणुकता को आधार देते हैं[11]।

सारणी 4

N-क्लोरो ऐसेट-ऐनिलाइड तथा N-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेट ऐनिलाइड के पुनर्विन्यास में विशिष्ट अम्ल उत्प्रेरक तथा उदासीन दरों के तुलनात्मक आँकडे

	KH_0 10^4K सेंकड$^{-1}$	KN_0 10^4K सेंकड$^{-1}$
N-क्लोरो ऐसेट-ऐनिलाइड,		
सल्फ्यूरिक अम्ल-सोडियम सल्फेट	0·38	—
हाइड्रोक्लोरिक अम्ल-सोडियम क्लोराइड	2·81	—
N-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेट ऐनिलाइड		
सल्फ्यूरिक अम्ल-सोडियम सल्फेट	1·77	0·70
हाइड्रोक्लोरिक अम्ल-लिथियम क्लोराइड	11·75	1·58
हाइड्रोक्लोरिक अम्ल-सोडियम क्लोराइड	4·26	2·23

N-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेट-ऐनिलाइड में नाइट्रो समूह अम्ल उत्प्रेरकता की प्रभाविता को बढ़ाता है (सारणी 4)। नाइट्रो समूह के ऋणात्मक प्रेरक स्वभाव के कारण N—Cl बंध से क्लोरीन Cl^+ के रूप में निकलता है जिससे नाइट्रोजन पर प्रोटानीकरण सुगमता से होता है। इस प्रकार *N*-क्लोरो पैरा नाइट्रो ऐसेट-ऐनिलाइड का पुनर्विन्यास हाइड्रोक्लोरिक, सल्फ्यूरिक अम्ल में अम्ल उत्प्रेरित एवं उदासीन दरों के माध्यम से प्राप्त आँकड़ों के विवेचन के आधार पर निम्नलिखित आरेखों के अनुसार प्रस्तावित किया जा सकता है।

आरेख 1 हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में पुनर्विन्यास

आरेख 2 उदासीन पुनर्विन्यास

आरेख 3 सल्फ्यूरिक अम्ल में पुनर्विन्यास

निर्देश

1. इंगोल्ड, सी० के० तथा ह्यूजेज, ई० डी०, **क्वार्ट० रिव्यू**, 1952, 6

2. अब्देल रहमान, एफ० एम०, ह्टिकिन बाटम, डब्लू० जे० तथा बसिफ, एस०, **जर्न० केमि० सोसा०** (B), 1970, 1128-30

3. म्हाला, एम० एम०, पटवर्धन, एम० डी०, शर्मा, एम० डी० तथा गुप्ता, वी० के०, **जर्न० इंडियन केमि० सोसा०** में प्रकाशनार्थ प्रेषित

4. म्हाला, एम० एम०, पटवर्धन, एम० डी०, शर्मा, एस० डी० तथा गुप्ता, वी० के०, **जर्न० जीवाजी यूनि०** में प्रकाशनार्थ प्रेषित

5. देवार, एम० जे० एस० तथा स्काट, जे० एम०, डब्लू०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1955, 1845

6. म्हाला, एम० एम०, **शोध प्रबन्ध**, 1958, लंदन विश्वविद्यालय

7. म्हाला, एम० एम० तथा भाटवडेकर, सु० स०, **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका**, 1974, **17**, 17-30

8. जुकर, एल० तथा हेमेट, एल० बी०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1939, **61**, 2791

9. म्हाला, एम० एम०, भाटवडेकर, सु० स० तथा शर्मा, आर० एन०, **करेंट सांइस** में प्रकाशनार्थ स्वीकृत

10. बुनेट, जे० एफ०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1961, **83**, 4956

11. शालेगार, एल० एल० तथा लांग, एफ० ए० Advances in Physical-organic Chemistry. भाग (1), सम्पादक बी० गोल्ड, एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्क, 1963

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 4, October, 1975, Pages 297-301

कैम्पे द फेरी फलन, H-फलन तथा प्रथम प्रकार के चेबीशेफ बहुपदों वाला समाकल

वी० बी० एल० चौरसिया
गणित विभग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर

[प्राप्त—नवम्बर 1, 1974]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य कैम्पे द फेरी फलन, H-फलन तथा प्रथम प्रकार के चेबीशेफ बहुपद का मान ज्ञात करना है। चूँकि G-फलन तथा अन्य कई फलन H-फलन की विशिष्ट दशाओं के रूप में हैं अत: हमारे मुख्य फल की विशिष्ट दशाओं के रूप में अन्य विविध फलनों के लिये समाकल प्राप्त किये जा सकते हैं।

Abstract

An integral involving Kampe de Feriet function, H-function and Tchebichef polynomials of the first kind, *By* V. B. L. Chaurasia, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur.

The object of this paper is to evaluate an integral involving Kampe de Feriet function, H-function and Tchebichef polynomial of the first kind. Since the G-function and several other functions are special cases of the H-function, the integral for the various other functions can be deduced as special cases of our main result.

कैम्पे द फेरी फलन को निम्नवत् अंकित किया जाता है।

$$F\left[\begin{array}{c|c|c} u & a_u; & \\ w & c_w,\ c'_w: & x \\ v & b_v; & \\ \phi & d_\phi,\ d'_\phi: & y \end{array}\right] = \sum_{\lambda,\ \mu=0}^{\infty} E_{\lambda,\ \mu}\, x^\lambda\, y^\mu \tag{1·1}$$

जहाँ E निम्नलिखित व्यंजक के लिये आया है

$$\frac{\prod_{i=1}^{u} (a_i)_{\lambda+\mu} \prod_{i=1}^{\omega} (c_i)_\lambda (c'_i)_\mu}{\prod_{i=1}^{v} (b_i)_{\lambda+\mu} \prod_{i=1}^{\phi} (d_i)_\lambda (d'_i)_\mu \lambda!\ \mu!}$$

जिसमें (a_n), $(a_n)_{\lambda+\mu}$ तथा $(a)_k$ क्रमशः $a_1 \ldots a_n$; $(a_1)_{\lambda+\mu} \cdots (a_n)_{\lambda+\mu}$ तथा $\Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ के लिये आये हैं। (1·1) द्वारा दी जाने वाली श्रेणी परम अभिसारी है जब $u+w \leqslant v+\phi+5$

फाक्स का H-फलन इस प्रकार परिभाषित है :

$$H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[z\left|\begin{matrix}(A_p, e_p)\\(B_q, f_q)\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(B_j-f_j\xi) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-A_j+e_j\xi)\, z^\xi\, d\xi}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-B_j+f_j\xi) \prod_{j=m+1}^{p} \Gamma(A_j-e_j\xi)} \quad (1·2)$$

जहाँ रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया जाता है ; $0 \leqslant m \leqslant q$; $0 \leqslant n \leqslant p$; $e_j(j=1 \ldots p)$ तथा $f_j(j=1 \ldots p)$ धन संख्यायें हैं। कंटूर L एक ऋजु रेखा है जो काल्पनिक अक्ष के इस प्रकार समान्तर है कि $\Gamma(B_h-f_h\xi)(h=1 \ldots m)$ के पोल इसके दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-A_i+e_i\xi)(i=1 \ldots n)$ के पोल इसके बाईं ओर पड़ें।

ब्राक्समा (1963) ने H-फलन के उपगामी प्रसार तथा वैश्लेषिक प्रतिबन्ध की विवेचना की है।

संक्षेपण की दृष्टि से

$$\sum_{j=1}^{n} e_j - \sum_{j=n+1}^{p} e_j + \sum_{j=1}^{m} f_j - \sum_{j=m+1}^{q} f_j \equiv \Delta > 0$$

u, w, v, तथा ϕ के विशिष्ट मानों के लिये

$$F\left[\begin{matrix}0\\w\\0\\\phi\end{matrix}\left|\begin{matrix}\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\c_1, c'_1 \ldots c_w, c'_w\\\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\\d_1, d'_1 \ldots d_\phi, d'_\phi\end{matrix}\right|\begin{matrix}\\x\\y\\\\\end{matrix}\right]\ {}_\omega F_\phi\left[\begin{matrix}c_1 \ldots c_w\\d_1 \ldots d_\phi\end{matrix}\right]\ {}_\omega F_\phi\left[\begin{matrix}c'_1 \ldots c'_w\\d'_1 \ldots d'_\phi\end{matrix}\right] \quad (1·3)$$

$$F\left[\begin{matrix}1\\1\\1\\0\end{matrix}\left|\begin{matrix}a_1;\\c_1,\ c'_1;\\b_1;\\\cdots\ \cdots\end{matrix}\right|\begin{matrix}\\x\\y\\\\\end{matrix}\right]=F_1(a_1, c_1, c'_1, b_1, x, y) \quad (1·4)$$

$$F\begin{bmatrix} 1 & a_1 & \\ 1 & c_1,\ c'_1 & x \\ 0 & \ldots & \\ 1 & d_1\ \ d'_1 & y \end{bmatrix} = F_2(a_1, c_1, c'_1, d_1, d'_1, x, y) \tag{1·5}$$

$$F\begin{bmatrix} 0 & \ldots & \\ 2 & c_1, c'_1, c_2; c'_2 & \\ 1 & b_1 & x \\ 0 & \ldots & y \end{bmatrix} = F_3(c_1, c'_1, c_2, c'_2, b_1, x, y) \tag{1·6}$$

2. मुख्य समाकल

$$\int_0^1 x^{\rho}(1-x)^{-1/2}\, T_k(2x-1)\, F\begin{bmatrix} u & a_u & Mx^s \\ w & c_w,\ c'_w & Nx^s \\ v & b_v & \\ \phi & d_\phi, d'_\phi & \end{bmatrix} H^{m,\,n}_{p,\,q}\left[zx^{\delta} \begin{vmatrix} (A_p, e_p) \\ (B_q, f_q) \end{vmatrix} \right] dx$$

$$= \sqrt{\pi} \sum_{\lambda,\,\mu=0}^{\infty} E_{\lambda,\,\mu}\, M^{\lambda}\, N^{\mu}\, H^{m,\,n+2}_{p+2,\,q+2}\left[z \begin{vmatrix} (-\rho-\lambda s-\mu s, \delta), (-\rho-\lambda s-\mu s-\frac{1}{2}, \delta), (A_p, e_p) \\ (B_q, f_q), (\pm k-\frac{1}{2}-\rho-\lambda s-\mu s, \delta) \end{vmatrix} \right] \tag{2·1}$$

$s>0$, $\delta>0$, $\triangle>0$, $|\arg z|<\frac{1}{2}\triangle\pi$, $R(\rho+\delta B_h/f_h)>-1 (h=1..m)$ तथा $u+w\leqslant v+\phi+1$

उपपत्ति :

(2·1) को सिद्ध करने के लिये(1·1) तथा (1·2) का उपयोग करने पर प्रक्रिया में सन्निहित समाकल तथा संकलन के पूर्ण अभिसरण के कारण विहित होने के फलस्वरूप समाकलन तथा संकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर वाम पक्ष

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(B_j-f_j\xi) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-A_j-e_j\xi)\, z^{\xi}}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-B_j+f_j\xi) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(A_j-e_j\xi)} \sum_{\lambda,\,\mu=0}^{\infty} E_{\lambda,\,\mu}\, M^{\lambda}\, N^{\mu}$$

$$\times\left\{\int_0^1 x^{\rho+\lambda s+\mu s+\delta\xi}(1-x)^{-1/2}\, T_k(2x-1)\, dx\, d\xi\right.$$

हो जाता है ।

अब फल [3 p. 271(1)] की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात करने पर हमें (1·2) के उपयोग द्वारा दाहिना पक्ष प्राप्त होता है।

3. **विशिष्ट दशायें**

(i) यदि (2·1) में $u=v=0$ रखें तथा (3·1) का उपयोग करें तो

$$\int_0^1 x^\rho(1-x)^{-1/2}\, T_k(2x-1)\, {}_\omega F_\phi\left[\begin{matrix}c_1\ldots c_w\\ d_1\ldots d_\phi\end{matrix};\, Mx^s\right] {}_\omega F_\phi\left[\begin{matrix}c'_1\ldots c'_w\\ d'_1\ldots d'_\phi\end{matrix};\, Nx^s\right] \times H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[zx^\delta \left|\begin{matrix}(A_p, e_p)\\(B_q, f_q)\end{matrix}\right.\right] dx$$

$$=\sqrt{\pi}\sum_{\lambda,\mu=0}^{\omega} \frac{\prod\limits_{i=1}^{\omega}(c_i)_\lambda(c'_i)_\mu\, M^\lambda N^\mu}{\prod\limits_{i=1}^{\phi}(d_i)_\lambda(d'_i)_\mu\, \lambda!\, \mu!}$$

$$H_{p+2,\,q+2}^{m,\,n+2}\left[z\left|\begin{matrix}(-\rho-\lambda s-\mu s,\, \delta),(-\rho-\lambda s-\mu s-\frac{1}{2},\, \delta),\, (A_p,\, e_p)\\(B_q, f_q),(\pm k-\rho-\lambda s-\mu s-\frac{1}{2},\, \delta)\end{matrix}\right.\right] \quad (3\cdot 1)$$

$s>0,\ \delta>0,\ \triangle>0,\ |\arg z|<\frac{1}{2}\triangle\pi,\ R(\rho+\delta\, B_h/f_h)>-1\ (h=1\ldots m)$ और $w\leqslant\phi+1$

(ii) $u=w=v=1$ तथा $\phi=0$ रखने पर तथा (1·4) का उपयोग करने पर

$$\int_0^1 x^\rho(1-x)^{-1/2}\, T_k(2x-1)\, F_1(a_1,\, c_1,\, c'_1,\, b_1,\, Mx^s\, Nx^s)\; H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[zx^\delta \left|\begin{matrix}(A_p, e_p)\\(B_q, f_q)\end{matrix}\right.\right] dx$$

$$=\sqrt{\pi}\sum_{\lambda,\,\mu=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{\lambda+\mu}(c_1)_\lambda\, (c'_1)_\mu\, M^\lambda\, N^\mu}{(b_1)_{\lambda+\mu}\, \lambda!\, \mu!}$$

$$H_{p+2,\,q+2}^{m,\,n+2}\left[z\left|\begin{matrix}(-\rho-\lambda s-\mu s,\, \delta),\, (-\rho-\lambda s-\mu s-\frac{1}{2},\, \delta)(A_p,\, e_p)\\(B_q, f_q),\, (\pm k-\rho-\lambda s-\mu s-\frac{1}{2},\, \delta)\end{matrix}\right.\right] \quad (3\cdot 2)$$

जो (2·1) से प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

(iii) (2·1) में $u-w=\phi,\ v=0$ रखने पर तथा (1·5) का उपयोग करने पर

$$\int_0^1 x^\rho(1-x)^{-1/2}\, T_k(2x-1)\, F_2(a_1,\, c_1,\, c'_1,\, d_1,\, d'_1,\, Mx^s,\, Nx^s)\, H_{p,\,q}^{m,\,n}\left[zx^\delta \left|\begin{matrix}(A_p, e_p)\\(B_q, f_q)\end{matrix}\right.\right] dx$$

$$=\sqrt{\pi}\sum_{\lambda,\,\mu=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{\lambda+\mu}\, (c_1)_\lambda(c'_1)_\mu\, M^\lambda\, N^\mu}{(d_1)_\lambda(d'_1)_\mu\, \lambda!\, \mu!}$$

$$H_{p+2,\,q+2}^{m,\,+2}\left[z\left|\begin{matrix}(-\rho-\lambda s-\mu s,\, \delta),\, (-\rho-\lambda s-\mu s-\frac{1}{2},\, \delta),\, (A_p,\, e_p)\\(B_q, f_q),\, (\pm k-\rho-\lambda s-\mu s-\frac{1}{2},\, \lambda)\end{matrix}\right.\right] \quad (3\cdot 3)$$

जो (2·1) से प्राप्य प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

(iv) जब (2·1) में $u=\phi=0$, $w=2$ तथा $v=1$ तथा (1·6) का उपयोग करते हैं तो

$$\int_0^1 x^\rho(1-x)^{-1/2}\, T_k(2x-1)\, F_3(c_1, c'_1, c_2, c'_2, b_1, Mx^s, Nx^s)\, H_{p,\ q}^{m,\ n}\left[zx^\delta \left|\begin{matrix}(A_p, e_p)\\(B_q, f_q)\end{matrix}\right.\right] dx$$

$$=\sqrt{\pi} \sum_{\lambda,\ \mu=0}^{\infty} \frac{(c_1)_\lambda (c'_1)_\mu (c_2)_\lambda (c'_2)_\mu\, M^\lambda\, N^\mu}{(b_1)_{\lambda+\mu}\ \lambda\,!\ \mu\,!}$$

$$H_{p+2,\ q+2}^{m,\ n+2}\left[z\left|\begin{matrix}(-\rho-\lambda s-\mu s, \delta), (-\rho-\lambda s-\mu s-\frac{1}{2}, \delta)(A_p, e_p)\\(B_q, f_q),(\pm k-\rho-\lambda s-\mu s-\frac{1}{2}, \delta)\end{matrix}\right.\right] \quad (3·4)$$

जो (2·1) से प्राप्य प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है।

(v) चूँकि G-फलन तथा अन्य कई फलन H-फलन की विशिष्ट दशाओं के रूप में हैं, अतः विभिन्न अन्य फलनों के लिये हमारे मुख्य फल की विशिष्ट दशा के रूप में समाकल प्राप्त किये जा सकते हैं।

निर्देश

1. ऐपेल, पी० तथा कैम्पे द फेरी, "Functions Hypergeometrique, Hyperspherique" **गाथियर विलर्स, पेरिस**, 1926.
2. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Comp. Maths, 1963, **16**, 239-341.
3. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transform, भाग 2, **न्यूयार्क**, 1954.
4. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 4, October 1975, Pages 303-304

आर्गान में देहली-विभव पर किरणन का प्रभाव

जगदीश प्रसाद
रसायन विभाग, मेरठ कॉलेज, मेरठ

[प्राप्त—सितम्बर 1, 1975]

सारांश

पारद-वाष्प-संदूषित आर्गान में देहली-विभव V_m के अध्ययन से पता चला है कि किरणन के दौरान V_m(L), अंधकार में $V_m(D)$ से अधिक होता है। इसका कारण $V_m(D)$ पर $-\triangle i$ की उपस्थिति बताई गई है।

Abstract

Influence of irradiation on the threshold potential in argon. *By* Jagdish Prasad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

The study of the threshold potential, V_m in mercury vapour contaminated argon has revealed that V_m under irradiation, $V_m(L)$ is higher than that in dark, $V_m(D)$. This has been ascribed due to the occurrence of $-\triangle i$ at $V_m(D)$.

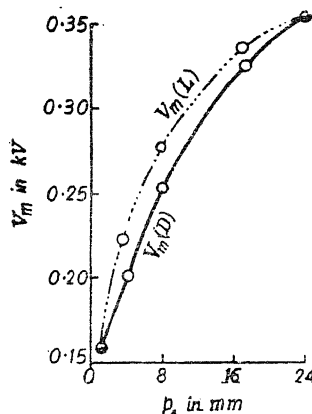
ऋणात्मक जोशी प्रभाव, $-\triangle i$ की उत्पत्ति के अनुकूल अवस्थाएँ देहली-विभव, $V_m(D)$ को प्रभावित कर सकती हैं अतः पारद-वाष्प-संदूषित आर्गान में इसका अध्ययन किया गया।

प्रयोगात्मक

लेखक के पूर्व-प्रकाशित लेख[1, 2] के समान प्रस्तुत अध्ययन सोडा-काँच के ओज़ोनित्र में सम्पन्न किया गया है। विविध दाबों पर शुष्क आर्गान को 30 से० पर द्रव पारे के सम्पर्क में रखा गया। ओज़ोनित्र से 25 सेमी० पर स्थित 200 वाट, 200 वोल्ट वाला एक तापदीप्त (काँच) लैम्प किरणन-स्रोत के रूप में प्रयुक्त किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

प्रकाश में वैद्युत चालकता में ह्रास चित्र 1 अर्थात् ऋणात्मक जोशी प्रभाव की उत्पादक अवस्थाओं में, अंधकार में धारा-विद्युत् की अपेक्षा प्रकाश में धारा-विद्युत् का मान कम होता है। यदि V अनुप्रयुक्त

विभव है, तो अधिवोल्टता[3] $(V-V_m)$ में ह्रास के द्वारा, किसी विसर्जन-नलिका में प्रवाहित होने वाली धारा-विद्युत् घट जाती है। यदि अनुप्रयुक्त विभव स्थिर रखा जाता है तो धारा-विद्युत् में ह्रास का कारण, देहली-विभव[4] में वृद्धि पर आरोपित किया जा सकता है। चूँकि ऋणात्मक जोशी-प्रभाव की अवस्था में अंधकार में परिमाण की धारा-विद्युत् प्राप्त करने के लिए उच्चतर क्षेत्र की आवश्यकता होती है,

चित्र 1

अतः किरणन के कारण V_m में हुई वृद्धि (चित्र 1), ऋणात्मक जोशी प्रभाव की उपस्थिति के कारण हो सकती है।

निर्देश

1. प्रसाद, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1972, **15(2)**, 79
2. प्रसाद, **रिव्यु रुमेन डि० किमि०**, 1973, **18**, 1865
3. जोशी, **प्रोसी० इंडियन साइं० कांग्रे०**, 1945, **22**, 389
4. जोशी, **करेन्ट साइंस**, 1939, **8**, 548

Vijnana Parisad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 4, October, 1975, Pages 305-307

धात्विक आयनों के साथ पेनिसिलिन-G के यौगिकों का अध्ययन

कु० अनुराधा तिवारी तथा पी० बी० चक्रवर्ती
रसायन प्रयोगशाला, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—सितम्बर 13, 1975]

सारांश

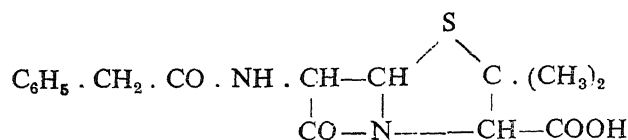
पेनिसिलिन-जी के सोडियम लवण की विभिन्न धात्विक आयनों के साथ, जलीय एवं अजलीय माध्यमों में, अभिक्रिया एवं बनने वाले संकुलों की मारशः अनुपातमिति का अध्ययन किया गया। पांडे तथा नायर की मोनोवेरिएशन-विधि का उपयोग करते हुए चालकतामापी एवं विभवमापी (pH) अध्ययन बताते हैं कि Be(II), Mg(II), Ca(II), Cu(II), Co(II), Ni(II), Cr(III), Mn(II), Zn(II), Cr(III) तथा Fe(II) पेनिसिलिन-G के साथ 1:1 तथा 1:2 संकुल बनाते हैं और इस अभिक्रिया में क्रमशः एक औ दो प्रोटॉन मुक्त होते हैं।

Abstract

Study of compounds of Penicillin-G with metallic ions. *By* Km. Anuradha Tiwari and P. B. Chakravarti, Chemical Laboratories, Motilal Science College, Bhopal.

The reaction of sodium salt of Penicillin-G with various metal ions in different medium has been studied and the stoichiometry of Be(II), Mg(II), Ca(II), Cu(II), Co(II), Ni(II), Mn(II), Zn(II), Fe(II), and Cr(II) complexes with Penicillin-G has been obtained using conductometric and pH-titrations. Stoichiometric studies utilising Nair and Pande's monovariation method indicate formation of 1:1 and 1:2 complexes in these cases, while pH-metric titrations indicate liberation of only one portion in each step of complexation. Based on these observations the complexation-reactions have also been proposed.

पेनिसिलिन सफल प्रतिजैविक औषधियों में से एक है। यह पिछले 45 वर्षों से मानव-सेवा में प्रयुक्त हो रही है। विभिन्न पेनिसिलिनों में सबसे अधिक महत्वपूर्ण पेनिसिलिन-G अथवा बेन्जिल पेनिसिलिन है। इसे निम्नांकित संरचना द्वारा प्रदर्शित किया जाता है :

```
                                   S
                                  / \
C6H5 . CH2 . CO . NH . CH—CH       C . (CH3)2
                       |   |       |
                       CO—N———————CH—COOH
```

हाल ही में मलीसा[1] ने इस औषधि के वैश्लेषिक अभिकर्मक के रूप में उपयोग की संभावना व्यक्त की है। अतः प्रस्तुत शोधपत्र में पेनिसिलिन-जी के सोडियम लवण की विभिन्न धातु-आयनों के साथ की अभिक्रिया एवं बनने वाले संकुलों की भारशः अनुपातमिति (stoichiometry) का अध्ययन प्रस्तुत किया गया है।

प्रयोगात्मक

गुणात्मक अध्ययन

जलीय विलयनों में गुणात्मक अध्ययन बताते हैं कि Ag(I), Hg(II), Pb(II), Al(III), Zr(IV), Ce(IV) तथा Th(IV) सोडियम पेनिसिलिन-G के साथ तत्काल अविलेय अवक्षेप बनाते हैं ; जबकि Cu(II), Mn(II), Ce(III), W(IV) तथा Se(VI) के साथ विलयन को 6 से 12 घंटे रखने के बाद अवक्षेप प्राप्त होता है। ये अवक्षेप अम्लीय माध्यम में विलेय पाये गये जबकि Ag(I) के साथ बना अवक्षेप अमोनिया विलयन में भी विलेय पाया गया।

यह देखा गया कि Cu(II),Pb(II), Mn(II), Al(III), In(III), Ce(III), Ce(IV), Zr(IV) तथा Th(IV) के अतिरिक्त Be(II), Co(II), Cd(II), Cr(III) तथा Tl(I) भी सोडियम पेनिसिलिन-G के द्वारा अमोनियामय माध्यम में अवक्षेपित हो जाते हैं।

अजलीय विलयनों के लिये ऐल्कोहॉल तथा ऐसीटोन विलायक के रूप में उपयोग में लाये गये। इन अध्ययन के अनुसार Be(II), Cd(II) तथा V(IV) ऐल्कोहॉली विलयनों में सोडियम पेनिसिलिन-G के साथ अवक्षेप बनाते हैं [Hg(II), Ce(III), Mo(VI), तथा Se(VI) के साथ 6 से 12 घंटे रखने के बाद अवक्षेप प्राप्त होता है]; जबकि Ag(I), Be(II) तथा V(IV) ऐसीटोन के विलयनों में अवक्षेपित हो जाते हैं [Hg(II), Fe(III) तथा W(VI) विलयनों को 24 घंटे रखने पर अवक्षेप देते हैं]।

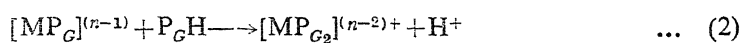
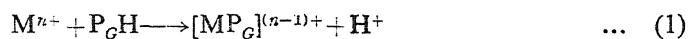
मिश्रित विलायकों में अध्ययन बताते हैं कि Ag(I), Ni(II), Hg(II), Cr(III), In(III),Ce(III), Zr(IV), Th(IV), W(VI), Pb(II), Mo(VI) तथा Tl(I) जलीय-ऐल्कोहॉल विलयनों में तथा Ag(I), Hg(II), Pb(II), In(III), Ce(III), V(IV), Se(VI), Tl(I), Zr(IV), Fe(III) तथा Ca(II) (रखने पर) जल-ऐसीटोनी विलयनों में सोडियम पेनिसिलिन-G के साथ अवक्षेपित हो जाते हैं।

भारशः अनुपातमिति

धातु आयनों और पेनिसिलिन-G से बनने वाले यौगिकों में धातु आयन और लिगैंड अणु के अनुपात के निर्धारण के लिये पांडे तथा नायर[2] की एकपरिवर्तन (मोनोवेरिएशन) विधि का उपयोग

करते हुए चालकतामापी तथा विभवमापी (pH)-अनुमापन किये गये। अनुपात अनुमापन बताते हैं कि Be(II), Mg(II), Ca(II), Cu(II), Co(II), Ni(II), Mn(II), Zn(II), Fe(II) तथा Cr(III) के साथ 1:1 तथा 1:2 संकुल बनते हैं। विभवमापी (pH)-अनुमापनों के अनुसार 1:1 तथा 1:2 संकुलों के निर्माण के समय क्रमशः एक तथा दो प्रोटॉन (H^+) मुक्त होते हैं। अतः संकुलीकारक अभिक्रिया निम्न रूप में दर्शायी जा सकती है :

$$M^{n+} + P_GH \longrightarrow [MP_G]^{(n-1)+} + H^+ \qquad \ldots (1)$$

$$[MP_G]^{(n-1)} + P_GH \longrightarrow [MP_{G_2}]^{(n-2)+} + H^+ \qquad \ldots (2)$$

जहाँ M^n धातु आयन तथा P_GH पेनिसिलिन-G अणु को प्रदर्शित करते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत शोध में प्रयुक्त पेनिसिलिन-G लवण 'ग्लेक्सो लेबोरेटरीज' के सौजन्य से प्राप्त हुआ, लेखक उनके हृदय से आभारी हैं। शोधकार्य में सहायता के लिए लेखक मो० ला० वि० महाविद्यालय, भोपाल के प्राचार्य डॉ० एस० एन० कवीश्वर और वनस्पति विभाग के प्राध्यापक श्री एस० सी० सक्सेना के भी आभारी हैं।

निर्देश

1. मलीसा, एच०, **माइक्रो० केमि० ऐक्टा,** 1951, **38**, 120-30.
2. नायर, एम० आर० तथा पान्डे, सी० एस०, **प्रोसी० इन्डियन ऐकेड० साइन्स,** 1948, **27A**, 284.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No 4, October, 1975, Pages 309-311

समदैशिक समांग आयताकार समान्तर षट्फलक में ऊष्मा संचलन

के० डी० शर्मा
राजकीय लोहिया कालेज, चूरू,
तथा
बी० एस० मेहता
राजकीय कालेज, शाहपुरा (भीलवाड़ा)

[प्राप्त—जून 6, 1975]

सारांश

एक आयताकार समान्तर षट्फलक में ऊष्मा के संचलन पर विचार करते हुये समीकरण प्राप्त किया गया है।

Abstract

Conduction of heat in an isotropic homogeneous rectangular parallalopiped. *By* K. D. Sharma, Government Lohia College, Churu and B. S. Mehta, Government College, Shahpura (Bhilwara).

We consider here flow of heat in a rectangular parallalopiped $0<x<a$, $0<y<b$, $0<z<c$ when the initial temperature is assumed as V_0, the flux of heat is taken zero at the surfaces $x=0$, $y=0$, $z=0$ and the radiation takes place at the surfaces $x=a$, $y=b$, $z=c$, into a medium at zero temperature.

ऊष्मा के संचलन का समीकरण [1, p. 9] निम्नवत् है :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial t},\ t>0, \tag{1}$$

$$V\equiv V(x, y, z, t)$$

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध हैं

$$V(x, y, z, t)\,|_{t=0}=V_0 \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0}=0, \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}+h_1 V\right]_{x=a}=\left[\frac{\partial V}{\partial y}+h_2 V\right]_{y=b}=\left[\frac{\partial V}{\partial z}+h_3 V\right]_{z=c}=0 \tag{4}$$

जहाँ h_1, h_2 h_3 विकिरण स्थिरांक हैं ।

हल: इस निर्मेय को हल करने के लिये उपयुक्त परिवर्त [2, p. 80]

$$\bar{V}(p, y, z)=\int_0^a V(x, y, z)\cos px\, dx \tag{5}$$

होगा जहाँ p समीकरण

$$p \tan pa=h_1 \tag{6}$$

का धन मूल (root) है ।

खण्डश: समाकलित करने पर

$$\int_0^a \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cos px\, dx=\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos px\right]_0^a+p\int_0^a \frac{\partial V}{\partial x}\sin px\, dx$$

$$=\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos px+pV\sin px\right]^a-p^2\int_0^a V\cos px\, dx \tag{7}$$

(3) के द्वारा दाहिनी ओर का प्रथम पद निम्नतर सीमा पर विलुप्त हो जाता है । उच्चतर सीमा पर इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$\cos pa\left[\frac{\partial V}{\partial x}+pV\tan pa\right]_{x=a}$$

जो (4) तथा (6) का उपयोग करने पर विलुप्त हो जाता है । इस प्रकार बाँयी ओर का समाकल $-p^2\,\bar{V}(p, y, z)$ में समानीत हो जाता है ।

जब समीकरण (1) में x, y तथा z को चरों के लिये परिवर्त (5) का उपयोग किया जाता है तो

$$\frac{d\bar{\bar{\bar{V}}}}{dt}+k(p^2+q^2+r^2)\bar{\bar{\bar{V}}}(p, q, r, t)=0 \tag{8}$$

जहाँ $$\bar{\bar{\bar{V}}}(p, q, r, t)=\int_0^a\int_0^b\int_0^c V(x, y, z, t)\cos px\cos qy\cos rz\, dx\, dy\, dz \tag{9}$$

तथा p, q, r क्रमश: समीकरण

$$p\tan pa=h_1$$
$$q\tan qb=h_2 \tag{10}$$

तथा $r \tan r c = h_3$ के धन ρ मूल हैं।

(8) का हल इस प्रकार होगा:

$$\overline{\overline{\overline{V}}}(p, q, r, t) = V_0 e^{-k(p^2+q^2+r^2 t)} \frac{\sin pa}{a} \times \frac{\sin qb}{b} \times \frac{\sin rc}{c} \tag{11}$$

अतः ताप $V(x, y, z, t)$ को व्युत्क्रम श्रेणी

$$V(x. y, t) = 8\Sigma_p \Sigma_q \Sigma_r \frac{(p^2+h_1^2)\cos px}{[a(p^2+h_1^2)+h_1]} \cdot \frac{(q^2+h_2^2)\cos qy}{[b(q^2+h_2^2)+h_2]}$$

$$\times \frac{(r^2+h_3^2)\cos rz}{[c(r^2+h_3^2)+h_3]} \overline{\overline{\overline{V}}}(p, q, r, t) \tag{12}$$

से प्राप्त किया जाता है।

$\overline{\overline{\overline{V}}}(p, q, r\ t)$ का मान (11) से (12) में रखने पर हमें ताप $V(x, y, z, t)$ प्राप्त होता है।

निर्देश

1. कार्सला, एस० एस० तथा जेगर, जे० सी०, Conduction of Heat in Solids, 1959 **संस्करण**
2. ट्रैंटर, सी० जे०, Integral transform in Mathematical Physics, **मेथुएन एंड कम्पनी लिमिटेड न्यूयार्क**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 4, October, 1975, Pages 313-317

n चरों वाले माइजर के G-फलन सम्बन्धी कुछ समाकल

एन० के० सोनी
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—जुलाई 9, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में n चरों वाले दो समाकल स्थापित किये गये हैं जिनसे इसके पूर्व सक्सेना द्वारा प्राप्त फलों के विस्तार प्राप्त होते हैं।

Abstract

Some integrals involving the Meijer's G-function of n variables. *By* N. K. Soni, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

In the present paper we establish two integrals involving n variables which provide the extensions of the results obtained earlier by Saxena.

1. भूमिका

हाल ही में खाडिया तथा गोयल[1] ने विश्लेषण में n चरों वाले माइजर के G-फलन का सूत्रपात किया है जो स्पष्टत: अग्रवाल[2] द्वारा अध्ययन किये गये दो चरों $G\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ वाले सार्वीकृत फलन का विस्तार है और निम्नलिखित रूप में है

$$G^{[m,\ 0]:\ (m_k,\ n_k)}_{[p,\ q];\ (p_k,\ q_k)}\left[x_k \,\Big|\, [(a_p), (b_q)];\ \left\{(c^{(k)}_{(p_k)}), (d^{(k)}_{(q_k)})\right\}\right] \tag{1·1}$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j+\Sigma s_k)}{\prod_{j=1+m}^{p}\Gamma(1-a_j-\Sigma s_k)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+\Sigma s_k)}$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\prod_{j=1}^{mk} \Gamma(1-c_j^{(k)}+s_k) \prod_{j=1}^{nk} \Gamma(d_j^{(k)}-s_k)(x_k^{s_k})}{\prod_{j=1+m_k}^{pk} \Gamma(c_j^{(k)}-s_k) \prod_{j=1+n_k}^{qk} \Gamma(1-d_j^{(k)}+s_k)} (ds_k) \right\}$$

जहाँ (x_k) शून्य के तुल्य नहीं है तथा रिक्त गुणनफल को इकाई माना जाता है। यही नहीं, $m, n, p, q, (m_k), (n_k), (p_k)$ तथा (q_k) इस प्रकार की अनृण पूर्ण संख्यायें हैं कि $p \geqslant 0, q \geqslant 0, q_k \geqslant 1, 0 \leqslant m_k \leqslant p_k$ तथा $0 \leqslant n_k \leqslant q_k$.

प्रस्तुत शोध पत्र में हम ऐसे दो समाकलों को जिनमें (1·1) सन्निहित है स्थापित करेंगे जो इसके पूर्व सक्सेना[3] द्वारा प्राप्त फलों के लिये विस्तार का कार्य करते हैं।

जिन समाकलों की स्थापना की जानी है, वे हैं

$$\int_0^1 t^{\rho-1} (1-t)^{\gamma-1} {}_2F_1 (\lambda, \mu; \gamma; 1-t) \tag{2·1}$$

$$\cdot G_{[p, q]; (p_k, q_k)}^{[m, o]; (m_k, n_k)} \left[z_k t^{\eta} \middle| [(a_p), (b_q)]; \left\{ (c_{(p_k)}^{(k)}), (d_{(q_k)}^{(k)}) \right\} \right]$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\eta^{\gamma}} G_{[p+2\eta, q+2\eta]; (p_k, q_k)}^{[m+2\eta, 0]; (m_k, n_k)} \left[z_k \middle| [\Delta(\eta, \rho), \Delta(\eta, \rho+\gamma-\lambda-\mu), (a_p); \right.$$

$$\left. \Delta(\eta, \rho+\gamma-\lambda), \Delta(\eta, \rho+\gamma-\mu) (b_q); \left\{ (c_{(p_k)}^{(k)}), (d_{(q_k)}^{(k)}) \right\} \right]$$

बशर्ते कि अनुभाग 1 में कथित समस्त प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं तथा

$$Re\left(\rho + \eta \sum_{j=1}^{k} d_{\lambda_j}^{(j)}\right) > 0, [\lambda_1 = 1, \ldots, n_1; \ldots; \lambda_k = 1, \ldots, n_k],$$

$$Re\left(\rho + \eta \sum_{j=1}^{k} d_{\lambda_j}^{(j)} + \gamma - \lambda - \mu\right) > 0, [\lambda_1 = 1, \ldots, n_1; \ldots; \lambda_k = 1, \ldots, n_k],$$

$$Re(\gamma) > 0$$

तथा

$$\int_0^1 t^{\rho-1} (1-t)^{\rho-1} G_{[p, q]; (p_k, q_k)}^{[m, 0]; (m_k, n_k)} \tag{2·2}$$

$$\left[z_k t^r (1-t)^s \middle| [(a_p), (b_q)]; \left\{ (c_{(p_k)}^{(k)}), (d_{(q_k)}^{(k)}) \right\} \right]$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2\pi(r+s)}{rs}\right)}\frac{r^{\rho}s^{\sigma}}{(r+s)^{\rho+\sigma}}\, G^{[m+r+s,\ 0];\ (m_k,\ n_k)}_{[p+r+s,\ q+r+s];\ (p_k,\ q_k)}$$

$$\left[z_k\frac{r^r s^s}{(r+s)^{r+s}}\middle| [\triangle(r,\rho),\ \triangle(s,\sigma),\ (a_p);\ (b_q),\ \triangle(r+s,\ \rho+\sigma)],\left\{(c^{(k)}_{(q_k)}),\ (d^{(k)}_{(q_k)})\right\}\right]$$

जो निम्नलिखित प्रतिबन्धों

$$Re\left(\rho+r\sum_{j=1}^{k} d^{(j)}_{\lambda_j}\right)>0,\ [\lambda_1=1,\ \ldots,\ n_1;\ \ldots;\ \lambda_k=1,\ \ldots,\ n_k]$$

$$Re\left(\sigma+s\sum_{j=1}^{k} d^{(j)}_{\lambda_j}\right)>0,\ [\lambda_1=1,\ \ldots,\ n_1;\ \ldots;\ \lambda_k=1,\ \ldots,\ n_k]$$

के अन्तर्गत तथा अनुभाग 1 में कथित प्रतिबन्धों सहित वैध है ।

पुनश्च $\triangle(\eta,\rho)$ द्वारा η प्राचलों का समुच्चय द्योतित है

$$\frac{\rho}{\eta},\ \frac{\rho+1}{\eta},\ \ldots,\ \frac{\rho+\eta-1}{\eta},$$ तथा आगे भी इसी प्रकार ।

(2·1) की उपपत्ति

(2·1) के वाम पक्ष को I द्वारा व्यक्त करते हुये यदि हम (1·1) का प्रयोग करें तो हमें

$$I=\int_0^1 t^{\rho-1}(1-t)^{\gamma-1}\ {}_2F_1(\lambda,\ \mu;\ \gamma;\ 1-t)$$

$$\cdot\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n} P_k\prod_{k=1}^{n}\{Q_k\, t^{\eta s_k}(ds_k)\}\ dt$$

प्राप्त होता है जिसमें संक्षेपण की दृष्टि से

$$P_k=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j+\Sigma s_k)}{\prod_{j=1+m_k}^{p}\Gamma(1-a_j-\Sigma s_k)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+\Sigma s_k)}$$

तथा

$$Q_k=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(1-c^{(k)}_j+s_k)\prod_{j=1}^{nk}\Gamma(d^{(k)}_j-s_k)(z_k^{s_k})}{\prod_{j=1+m_k}^{pk}\Gamma(c^{(k)}_j-s_k)\prod_{j=1+n_k}^{qk}\Gamma(1-d^{(k)}_j+s_k)}$$

इस प्रक्रिया में आये हुये समाकलों के पूर्ण अभिसरण के कारण समाकलन का क्रम बदलने पर

$$I=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n} P_k \int_0^1 t^{\rho+\eta\,\Sigma\, s_k-1}(1-t)^{\rho-1}$$

$$\cdot\, {}_2F_1(\lambda,\mu;\gamma;1-t)\,dt \prod_{k=1}^{n}\{Q_k(ds_k)\}$$

अब सूत्र [4, 20·2 (4)] द्वारा आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात करने पर

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\rho-1}\,{}_2F_1(\lambda,\mu;\gamma;x)\,dx = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\rho)\Gamma(\rho+\gamma-\lambda-\mu)}{(\gamma+\rho-\lambda)\Gamma(\gamma+\rho-\mu)} \tag{2·3}$$

जहाँ $Re\,(\gamma)>0$, $Re\,(\rho)>0$ तथा $Re\,(\rho+\gamma-\lambda-\mu)>0$

यह पाया जाता है कि

$$I=\frac{\Gamma(\gamma)}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n} P_k \frac{\Gamma(\rho+\eta\,\Sigma\, s_k)}{\Gamma(\rho+\gamma+\eta\,\Sigma\, s_k)}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\lambda,\mu;\\ \rho+\gamma+\eta\Sigma s_k;\end{matrix}\;1\right]\cdot\prod_{k=1}^{n}\{Q_k(ds_k)\}$$

और अधिक सरलीकरण तथा फिर गॉस के गुणन सूत्र [5, p. 4 (11)]

$$(nz)=(2\pi)^{(1-n)/2}n^{nz-1/2} \tag{2·4}$$

का प्रयोग करने पर ज्ञात होता है कि

$$I=\frac{\Gamma(\gamma)}{(2\pi i)^n\,\eta^r}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n} P_k \frac{\prod_{j=1}^{\eta}\Gamma\left(\frac{\rho+j-1}{\eta}+\Sigma\, s_k\right)\prod_{j=1}^{\eta}\Gamma\left(\frac{\rho+\gamma-\lambda-\mu+j-1}{\eta}+s_k\right)}{\prod_{j=1}^{\eta}\Gamma\left(\frac{\rho+\gamma-\lambda+j-1}{\eta}+\Sigma\, s_k\right)\prod_{j=1}^{\eta}\Gamma\left(\frac{\rho+\gamma-\mu+j-1}{\eta}+\Sigma\, s_k\right)}$$

$$\cdot\prod_{k=1}^{n}\{Q_k(ds_k)\}$$

जो (1·1) के अनुसार यथेष्ठ फल (2·1) की प्राप्ति करता है। (2·3) के बजाय बीटा फलन सूत्र [5, (1·5) (1)] का प्रयोग करने पर फल (2·2) को भी इसी प्रकार स्थापित किया जा सकता है।

विशिष्ट दशायें

(2·1) तथा (2·2) में $n=2$ रखने पर और फिर $m_1, n_1, n_2, m, p, q, p_1, p_2, q_1, q_2$, को क्रमश: $n_2, n_3, m_2, n_1, p, q, r, k, s, l$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर तथा $|a_p$, $c^{(1)}_{(p_1)}$, $c^{(2)}_{(p_2)}$, $d^{(1)}_{(q_1)}$, $d^{(2)}_{(q_2)}$,

z_1 z_2 **के स्थान** पर क्रमशः $1-a_p$, $1-c_k$, $1-e_k$, d_s, f_l, x तथा y लिखने पर हमें तुरन्त निम्नलिखित दो समाकल प्राप्त होते हैं जिनमें अग्रवाल[2] द्वारा प्राप्त दो चरों $G\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ का सार्वीकृत फलन सन्निहित है ।

$$\int_0^1 t^{\rho-1}(1-t)^{\gamma-1}\,{}_2F_1(\lambda,\mu,\gamma;1-t). \tag{3·1}$$

$$\cdot\, G^{0,\,n_1\,:\,(m_2,\,n_2);\,(m_3,\,n_3)}_{p+q\,:\,[r,\,s];\,[k,\,l]}\begin{bmatrix} xt^{\eta} \\ yt^{\eta}\end{bmatrix}\begin{matrix}(a_p)\,:\,(c_r):\,(k) \\ (b_q)\,:\,(d_r);\,(f)\end{matrix}$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\eta^{\gamma}}\,G^{0,\,n_1+2\,:\,(m_2,\,n_2);\,(m_3,\,n_3)}_{p+2,\,q+2\,:\,[r,\,s];\,[k,\,l]}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\begin{matrix}\triangle(\eta,\rho),\,\triangle(\eta,\rho+\gamma-\lambda-\mu),\,(a_p)\,:\,(c_r);\,(e_k) \\ \triangle(b_q),\,\triangle(\eta,\rho+\gamma-\lambda),\,\triangle(\eta,\rho+\gamma-\mu)\,:\,(d_s);\,(f_l)\end{matrix}$$

तथा

$$\int_0^1 t^{\rho-1}(1-t)^{\sigma-1}\,G^{0,\,n_1\,:\,(m_2,\,n_2);\,(m_3,\,n_3)}_{p,\,q\,:\,[r,\,s];\,[k,\,l]}\begin{bmatrix} xt^r(1-t)^s \\ yt^r(1-t)^s\end{bmatrix}\begin{matrix}(a_p)\,:\,(c_r);\,(e_k) \\ (b_q)\,:\,(d_s);\,(f_l)\end{matrix} \tag{3·2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2\pi(r+s)}{rs}\right)}\frac{r^{\rho}s^{\sigma}}{(r+s)^{\rho+\sigma}}\,G^{0,\,n_1+r+s\,:\,(m_2,\,n_2);\,(m_3,\,n_3)}_{p+r+s,\,q+r+s\,:\,[r,\,s];\,(k,\,l)}$$

$$\begin{bmatrix} x\dfrac{r^r s^s}{(r+s)^{r+s}} \\ y\dfrac{r^r s^s}{(r+s)^{r+s}}\end{bmatrix}\begin{matrix}\triangle(r,\rho),\,\triangle(s+\sigma),\,(a_p)\,:\,(c_r);\,(e_k) \\ (b),\,\triangle(r+s,\rho+\sigma)\,:\,(d_s);\,(f_l)\end{matrix}$$

बैधता के प्रतिबन्ध (2·1) तथा ((2·2) में उल्लिखित प्रतिबन्धों से प्राप्त किये जा सकते हैं ।

(3·1) तथा (3·2) में आये विभिन्न प्राचलों के विशिष्टीकरण से हमें कई रोचक फल प्राप्त होते हैं जिनमें से सक्सेना[3] के भी फल हैं ।

निर्देश

1. खाडिया, एस० एस० तथा गोयल, ए० एन०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका,** 1970, **13**, 191-201
2. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी साइं० इंडिया,** 1965, **31**, 536-46
3. सक्सेना, आर० के०, Estratto dalla Rivista, La Ricerca, 1970, **2**, 21-27
4. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Tables of Integral Transforms, **मैकग्राहिल**, **2**, 1954
5. वही, Higher Transcendental Functions, **मैकग्राहिल न्यूयार्क**, **1**, 1953

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No 4, October, 1975, Pages 319-323

सार्वीकृत बेटमैन फलन वाले समीकरण का प्रतिलोमन

बी० के० जोशी
गणित विभाग, राजकीय इंजीनियरिंग तथा टेकनालाजी महाविद्यालय, रायपुर

[प्राप्त—अप्रैल 1, 1975]

सारांश

सार्वीकृत बेटमैन फलन वाले एक समाकल समीकरण का प्रतिलोमन प्राप्त किया गया है।

Abstract

On the inversion of an integral equation involving generalized Bateman function. *By* B. K. Joshi, Department of Mathematics, Government College of Engineering and Technology, Raipur (M.P.).

An integral equation involving generalized Bateman function has been inverted.

1. विषय प्रवेश

समाकल समीकरण

$$\int_0^t K(t-u)g(u)\, du = f(t) \tag{1·1}$$

के हलों का प्रस्ताव विडर[8] ने रखा है। उन्होंने (1·1) का हल एक सरल लागेर बहुपद के रूप में जिसकी अष्टि $K(t)$ हो प्रस्तुत किया। उनकी विधि का अनुगमन करते हुये विभिन्न अष्टियों के साथ अनेक शोध पत्र प्रकाश में आये हैं।

अपने एक शोध पत्र में रूसिया[7] ने (1·1) के हल को सरल बेटमैन फलन की अष्टि के रूप में प्रस्तुत किया है। रूसिया द्वारा अध्ययन किये गये समाकल समीकरण का पुनः अनुसंधान गुप्ता[4] ने हाल ही में किया है। भारतीय[1] ने संवलन परिवर्त के प्रतिलोमन को प्राप्त किया है जिसमें सार्वीकृत बेटमैन फलन सन्निहित है। लेखक[5,6] ने भी सार्वीकृत बेटमैन फलन के रूप में अष्टि वाले कतिपय प्रतिलोमन समाकल प्राप्त किये हैं।

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य (1·1) के कुछ और प्रतिलोमन समाकल प्राप्त करना है जिनमें $\overset{l}{K_n}(x)$, सार्वीकृत बेटमैन फलन सन्निहित है। रूसिया[1] तथा गुप्ता[4] के फल विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किये गये हैं।

2. वांछित परिणाम

फलन $f(t)$ के लैप्लास परिवर्त को

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt=F(p),\ Re p>0 \tag{2·1}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है बशर्ते कि उपर्युक्त समाकल का अस्तित्व हो। हम (2·1) को सांकेतिक रूप में

$$f(t) \doteqdot F(p) \text{ अथवा } L\, f(t)=F(p)$$

के द्वारा व्यक्त प्रदर्शित करेंगे। निम्नांकित ज्ञात फल का उपयोग यथाक्रम में किया जावेगा।

$$f^n(t) \doteqdot p^n F(p)-p^{n-1}f(o)-p^{n-2}f'(o)-\ldots-f^{n+1}(o) \tag{2·2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)\, du=F_1(p) \,.\, F_2(p)\\ &\text{जहाँ } f_1(t) \doteqdot F_1(p) \text{ तथा } f_2(t) \doteqdot F_2(p)\end{aligned}\right\} \tag{2·3}$$

$$t^\alpha e^{\lambda t} \overset{\alpha}{L_n}(kt) \doteqdot \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\frac{(p-k-\lambda)^n}{(p-\lambda)^{\alpha+n+1}}$$

$$Re\, \alpha>-1,\ Re\,(p-\lambda)>0. \tag{2·4}$$

और $$t^{n-1} e^{-at} \doteqdot \frac{\Gamma(n)}{(p+a)^n} \tag{2·5}$$

सार्वीकृत बेटमैन फलन $\overset{l}{K_n}(x)$ को

$$\overset{l}{K_n}(x)=\int_0^{\pi/2} (2 \cos\theta)^l \cos(x \tan\theta-n\theta)\, d\theta$$

के रूप में परिभाषित किया जाता है जहाँ

$$l>-1$$

यदि $(n-l-1)$ तथा $(n+l)$ ऐसे अनृण पूर्णांक हों जिनमें शून्य सम्मिलित है कि $(n+l)>(n-l-1)$, तो हमें चक्रवर्ती का फल[2] प्राप्त होगा

$$e^{-1/2} \overset{2l}{K_{2n}}(\tfrac{1}{2}x)=\frac{(-1)^{n-l-1}}{\Gamma(n+l-1)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-l-1}[e^{-x}x^{n+l}] \tag{2·6}$$

(2·6) का उपयोग करने पर (2·7) प्राप्त होगा।

$$K_{2n}^{2l}[at] \doteqdot \frac{(-1)^{n-l-1}(2a)^{2l+1}, (p-a)^{n-l-1}}{(p+a)^{n+l+1}}. \tag{2·7}$$

3. **प्रमेय 1**

यदि (i) $(n-l-1)$ तथा $(n+l)$ अनृण पूर्णांक हैं (जिनमें शून्य सम्मिलित नहीं है) जिससे कि $2l > -1$

(ii) $f^m(o) = 0$ क्योंकि $0 \leqslant m \leqslant (n+l)$, तथा

(iii) $f^{n+l+1}(t)$ $0 \leqslant x < x_1 < \infty$ में खण्डशः संतत है

तो समाकल समीकरण

$$\int_0^t K_{2n}^{2l}\ [a(t-u)]g(u)\ du = f(t) \tag{3·1}$$

का हल

$$g(t) = \frac{A}{n-l-2!} \int_0^t {}^{a(t-u)}\ (t-u)^{n-l-2}[(D+a)^{n+l+1}f(u)]\ du \tag{3·2}$$

होगा जहाँ $A = \frac{(-1)^{n-l-1}}{(2a)^{2l+1}}$ (3·3)

तथा $D \equiv \frac{d}{du}$

उपपत्ति: माना कि $f(t) \doteqdot F(p)$ तथा $g(t) \doteqdot G(p)$

अब (3·1) का लैप्लास परिवर्त निकालने पर (2·3) के परिपेक्ष्य में (2·7) का सम्प्रयोग करने पर तथा परिणाम को पुनर्व्यवस्थित करने पर हमें (3·4) प्राप्त होता है।

$$G(p) = A \frac{1}{(p-a)^{n-l-1}} (h+a)^{n+l+1} F(p) \tag{3·4}$$

इस प्रकार (2·5) के अनुसार लैप्लास प्रतिलोमन से (3.2) मिलता है।

उपप्रमेय: n को $(n+1)$ के द्वारा प्रतिस्थापित करने, $l=0$ तथा $a=1$ रखने पर हमें रूसिया द्वारा स्थापित परिणाम[7] प्राप्त होता है।

प्रमेय 2

यदि (i) n तथा l ऐसी घन पूर्ण संख्याएं हैं कि $n > l$

(ii) $f^m(o)=0$ क्योंकि $0 \leqslant m \leqslant 2l+2$, तथा

(iii) $f^{2l+3}(t)$ $0 \leqslant x < x_1 < \infty$ में खण्डशः संतत हैं

तो (3·1) का हल

$$g(t)=A\int_0^t e^{a(t-u)}L_{n-l-2}[2a(u-t)][(D+a)^{2l+3}f(u)]\,du \tag{3·5}$$

होगा जहाँ A को (3·3) द्वारा दिखाया जाता है।

उपपत्ति: (3·4) को निम्न रूप में पुनः व्यवस्थित करने पर

$$G(p)=A\frac{(p+a)^{n-l-2}}{(p-a)^{n-l-1}}(p+a)^{2l+3}F(p)$$

(2·4) के प्रकाश में लैप्लास प्रतिलोमन का प्रयोग करने पर हमें (3·5) प्राप्त होता है।

प्रमेय 3

प्रमेय 2 के उन्हीं प्रतिबन्धों के अन्तर्गत (3·1) के हल को निम्नवत भी लिखा जा सकता है

$$g(t)=A\int_0^t e^{a(t-u)}L_{n-l-1}[2a(u-t)][(D^2-a^2)(D+a)^{2l+1}f(u)]\,du \tag{3·6}$$

इसे पिछले प्रमेयों की तरह सिद्ध किया जा सकता है।

विशिष्ट दशा: यदि हम n को $(n+1)$ द्वारा प्रतिस्थापित् करें और $a=1,\ l=0$ रखें तो हमें गुप्ता का परिणाम[4] प्राप्त होता है।

प्रमेय 4

यदि (i) n तथा l ऐसे पूर्णांक हैं कि $n>l$

(ii) $\left(\frac{d}{dt}\right)^{2l+2}[e^t f(t)]$ खंडशः संतत है $0 \leqslant x < x_1 < \infty$ तथा

(iii) $f^m(o)=0$ क्योंकि $0 \leqslant m \leqslant 2l+1$

तो (3·1) का हल

$$g(t)=A\,e^{-at}\left(\frac{d}{dt}\right)^{2l+2}[e^{at}f(t)]$$
$$+2aA\int_0^t e^{a(t-n)}\,L^{(1)}_{n-l-2}[2a(u-t)]\,e^{-au}\left(\frac{d}{du}\right)^{2l+2}[e^{au}f(u)]\,du \tag{3·7}$$

होगा जहाँ A को (3·3) द्वारा दिखाया जाता है।

उपपत्ति: यहाँ पर (3·4) को पुनर्व्यवस्थित करते हैं तो

$$G(p)=A\left[1+\frac{2a}{(p-a)}\right]^{n-l-1}(p+a)^{2l+2}\,F(p). \tag{3·8}$$

(2·5) के उपयोग से निम्नांकित फल को सरलता से सिद्ध किया जा सकता है:

$$\left[1+\frac{2a}{(p-a)}\right]^{(n-l-2)}=1+L\sum_{r=1}^{(n-l-1}\binom{n-l-1}{r}\frac{(2a)^r\,e^{at}\,t^{r-1}}{r-1\,!}$$

$$=1+L\left[2a(n-l-1)e^{at}\,{}_1F_1\,[-n+l+2;\,2;\,-2at]\right]$$

$$=1+L\left[2a\,e^{at}\,L^{(1)}_{n-l-2}\,(-2at)\right] \tag{3·9}$$

समीकरण (3·8) में (3·9) के साथ फल

$$(D+a)^m f(t)=e^{-at}\,D^{m}\,[e^{at} f(t)]$$

का प्रयोग करने पर तथा लैप्लास प्रतिलोमन प्रमेय को व्यवहृत करने पर हमें (3·7) की प्राप्ति होती है।

उपप्रमेय

उपर्युक्त प्रमेय में n के स्थान पर $(n+1)$ रखने तथा $a=1$, $l=0$ मानने पर गुप्ता का परिणाम[4] प्राप्त किया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० ग्रार० एस० शर्मा का सहायता के लिये और प्रो० वी० वी० सारटे का निरन्तर प्रोत्साहन प्रदान करने के लिये आभारी है।

निर्देश

1. भारतीय, पी० एल०, **जर्न० इण्डि० मैथ० सोसा०**, 1964, 28, 163
2. चक्रवर्ती, एन० के०, **बुले० कैल० मैथ० सोसा०**, 1953, **45**, 1
3. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms. **भाग I, मैकग्राहिल**
4. गुप्ता, एच० एल०, **विज्ञान परि० अनु० पत्रिका**, 1974, **17**, 115
5. जोशी, सी० के०, Mathematics Student, 1973, **XLI**, No. 4
6. वही, **प्रकाशनार्थ स्वीकृत**
7. रूसिया, के० सी०, **प्रोसी नेश० एके० साइंस, इंडिया**, 1967, **37**, 67
8. विडर, डी० वी०, **अमे० मैथ० मंथली**, 1963, **70**, 291

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 4, October, 1975, Pages 325-332

दो चरों वाले H-फलन के कतिपय समाकल सम्बन्ध तथा उनके सम्प्रयोग

ओ० पी० गर्ग
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर

[प्राप्त—जुलाई 5, 1974]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन ${}_pF_q$ तथा दो चरों वाले H-फलन के गुणनफल को सन्निवेश करने वाले कतिपय समाकल सम्बन्ध स्थापित करना है। इन सम्बन्धों का उपयोग कतिपय द्विगुण समाकलों का मान ज्ञात करने के लिये किया गया है।

Abstract

On certain integral relations involving H-function of two variables and their applications. *By* O. P. Garg, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur.

The aim of the present paper is to establish certain integral relations involving the product of the generalized hypergeometric function ${}_pF_q$ and the H-function of two variables. These relations are then used to evaluate certain double integrals involving the product of the generalized hypergeometric ${}_pF_q$, the Fox's H-function and the H-function of two variables. The results established in this paper are of a very general nature and are capable of yielding a number of results as particular cases.

1. विषय प्रवेश

इस शोधपत्र में आगत दो चरों वाला H-फलन निम्न प्रकार[4] से परिभाषित एवं व्यक्त किया जावेगा

$$H(x, y) = H\left[\begin{array}{c|l|c} \binom{0,\ n_1}{p_1,\ q_1} & \begin{array}{l}(a_j;\ \alpha_j A_j)_{1,\ p_1}\\(b_j;\ \beta_j,\ B_j)_{1,\ q_1}\end{array} & x \\ \binom{m_2,\ n_2}{p_2,\ q_2} & \begin{array}{l}(c_j,\ r_j)_{1,\ p_2}\\(d_j,\ \delta_j)_{1,\ q_2}\end{array} & y \\ \binom{m_3,\ n_3}{p_3,\ q_3} & \begin{array}{l}(e_j,\ E_j)_{1,\ p_3}\\(f_j,\ F_j)_{1,\ p_3}\end{array} & \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{L_1} \int_{L_2} \phi(s, t)\, \theta_1(s)\, \theta_2(t)\, x^s y^t\, ds\, dt \qquad \ldots \quad (11)$$

$$\phi(s, t) = \frac{\prod_{j=1}^{n_1} \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s + A_j t)}{\prod_{j=n_1+1}^{p_1} \Gamma(a_j - \alpha_j s - A_j t) \prod_{j=1}^{q_1} \Gamma(1 - b_j + \beta_j s + B_j t)}$$

$$\theta_1(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m_2} \Gamma(d_j - \delta_j s) \prod_{j=1}^{n_2} \Gamma(1 - c_j + r_j s)}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2} \Gamma(1 - d_j + \delta_j s) \prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma(c_j - r_j s)}$$

$$\theta_2(t) = \frac{\prod_{j=1}^{m_3} \Gamma(f_j - F_j t) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma(1 - e_j + E_j t)}{\prod_{j=m_3+1}^{q_3} \Gamma(1 - f_j + F_j \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma(e_j - E_j t)}$$

x, y शून्य के तुल्य नहीं हैं और रिक्त गुणनफल इकाई मान लिया गया है। पुनश्च m_2, m_3, n_i, p_i, q_i $(i=1, 2, 3)$ सभी अनृण पूर्णांक हैं कि $0 \leqslant q_i, 0 \leqslant n_i \leqslant p_i, 0 \leqslant m_j \leqslant q_j (i=1, 2, 3; j=2, 3)$ और $\alpha_j, \beta_j, r_j, \delta_j, A_j, B_j, E_j, F_j$ धन पूर्णांक हैं। कंटूर L_1 तथा L_2 उपयुक्त रीति से परिभाषित हैं।

(1·1) में परिभाषित $H(x, y)$, जिन प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अभिसारी होता है और वैश्लेषिक फलन को व्यक्त करता है, वे मित्तल तथा गुप्ता[4] के शोधपत्र में दिये गये हैं। स्थानाभाव के कारण वे यहाँ नहीं दिये जा रहे। किन्तु यह मान लिया गया है कि इन प्रतिबन्धों के संगत प्रतिबन्ध इस शोधपत्र में आये दो चरों वाले समस्त H-फलनों के द्वारा तुष्ट होते हैं। उसी शोधपत्र में फलन $H(x, y)$ की विभिन्न विशिष्ट दशाओं का भी उल्लेख है।

प्रयुक्त संकेतन:

$(a_j; \alpha_j, A_j)_{n+1, p} (a_{n+1}; \alpha_{n+1}, A_{n+1}), (a_{n+2}; \alpha_{n+2}, A_{n+2}), \ldots, (a_p: \alpha_p, A_p)$ $\big\}$ $0 \leqslant n < p$ के लिये तथा $(a_j, \alpha_j)_{n+1, p} (a_{n+1}, \alpha_{n+1}), \ldots, (a_p, \alpha_p)$ के लिये $1 < p$.

आये हैं। अब (1·1) में $n_1 = 0$, तो हम (1·1) में प्राप्त होने वाले समीकरण को $H(x, y)$ न लिखकर $H_1(x, y)$ लिखेंगे। पुनश्च, हम निम्नलिखित संकेतन:

$$H \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} 0, n_1 \\ p_1, q_1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (a_j; \alpha_j, A_j)_{1, p_1} \\ (b_j; \beta_j, B_j)_{1, q_1} \end{array} & x \\ \ldots & \ldots & y \\ \ldots & \ldots & \end{array} \right]$$

को यह द्योतित करने के लिये प्रयुक्त करेंगे कि विन्दुकित (...) प्राचल वे ही हैं जो (1·1) में $H(x, y)$ के हैं। इसी प्रकार के अन्य संकेतनों का भी वही प्रयोजन है।

2. मुख्य समाकल सम्बन्ध

(i)
$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cos(2u \tan^{-1} y/x) \frac{y^{2\xi}}{(x^2+y^2)^{\xi}} \, {}_PF_Q\left(\begin{matrix}(M_j)_{1,P} \\ (N_j)_{1,Q}\end{matrix}; \frac{ay^{2h}}{(x^2+y^2)^h}\right) \times H_1\left[\frac{b\,y^{2K}}{(x^2+y^2)^{K-\rho_1}}, \frac{c\,y^{2K'}}{(x^2+y^2)^{K'-\rho_2}}\right] f(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \frac{\Gamma(1/2 \pm u)}{2^{2\xi+2}} \sum_{R=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{P} (M_j)_R}{\prod_{j=1}^{Q} (N_j)_R} \frac{a^R}{R!} \frac{1}{4^{hR}} \int_0^\infty f(t)$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0, n_1+1 \\ p_1+1, q_1+2\end{pmatrix} \\ \cdots \\ \cdots\end{matrix}\left|\begin{matrix}(-2\xi-2hR; 2K, 2K'), (a_j; \alpha_j, A_j)_{1,p_1} \\ (-\zeta-hR\pm u; K, K'), (b_j: \beta_j, B_j)_{1,q_1} \\ \cdots \\ \cdots\end{matrix}\right|\begin{matrix}\frac{bt^{\rho_1}}{4^K} \\ \frac{ct^{\rho_2}}{4^{K'}}\end{matrix}\right] dt \qquad (2·1)$$

(ii)
$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cos(2u \tan^{-1} y/x) \frac{y^{-2\xi}}{(x^2+y^2)^{-\xi}} \, {}_PF_Q\left(\begin{matrix}(M_j)_{1,P} \\ (N_j)_{1,Q}\end{matrix}; \frac{ay^{-2h}}{(x^2+y^2)^{-h}}\right) \times H_1\left[by^{-2k}(x^2+y^2)^{K+\rho_1}, c(K^2+y^2)^{\rho_2}\right] f(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

$$= \frac{\Gamma(1/2)}{4} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{P} (M_j)_R}{\prod_{j=1}^{Q} (N_j)_R} \frac{a^R}{R!} \int_0^\infty f(t)$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\cdots \\ \begin{pmatrix}m_2+1, n_2 : 1 \\ p_2+2, q_2+2\end{pmatrix} \\ \cdots\end{matrix}\left|\begin{matrix}\cdots \\ (1-\xi-hR-u, K), (c_j, r_j)_{1,p_2}, (1-\xi-hR+u, K) \\ (1/2-\xi-hR, K), (d_j, \delta_j)_{1,q_2}, (1-\xi-hR, K) \\ \cdots\end{matrix}\right|\begin{matrix}bt^{\rho_1} \\ ct^{\rho_2}\end{matrix}\right] dt$$

. . . (2·2)

(iii) $$\int_0^\infty \int_0^\infty \sin\{(2u+1)\tan^{-1} y/x\} \frac{y^{1-2\xi}}{(x^2+y^2)_{1/2-\xi}} \, {}_PF_Q\left(\begin{matrix}(M_j)_{1,P};\\(N_j)_{1,Q}\end{matrix}\; \frac{ay^{-2h}}{(x^2y^2)^{-h}}\right)$$
$$\times H_1\,[by^{-2k}(x^2+y_2)^{K+\rho_1},\ c(x^2+y^2)^{\rho_2}]\times f(x^2+y^2)\,dx\,dy.$$

$$=\frac{\Gamma(1/2)}{4}\sum_{R=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{P}(M_j)_k}{\prod_{j=1}^{Q}(N_j)_R}\frac{a^R}{R!}\int_0^\infty f(t)$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\cdots\\ \begin{pmatrix}m_2+1,\ n_2+1\\ p_2+2,\ q_2+2\end{pmatrix}\\ \cdots\end{matrix}\left|\begin{matrix}\cdots\\ (1-\xi-hR-u,K),(c_j,r_j)_{1,p_2},(1-\xi-hR+u,K)\\ (3/2-\xi-hR,K),(d_j,\delta_j)_{1,q_2},(1-\xi-hR,K)\\ \cdots\end{matrix}\right|\begin{matrix}bt^{\rho_1}\\ ct^{\rho_2}\end{matrix}\right]dt \quad \ldots \quad (2\cdot3)$$

जहाँ उपर्युक्त समस्त समाकल सम्बन्धों के लिये यह मान लिया गया है कि $u=0, 1, 2. \ldots, \rho_1, \rho_2, h, K, K'$ सभी धन हैं और प्राचल $N_j (j=1, 2, \ldots, Q)$ सभी $0, -1, 2, \ldots: P \leqslant Q$ या $P=Q+1$ तथा $|a|<|$ या $P=Q-1$, $|a|=1$ से भिन्न हैं तथा

$$Re\left(\sum_{j=1}^{Q}(N_j)-\sum_{j=1}^{P}(M_j)\right)>0$$

पुनश्च, $f(t)$ ऐसा चुना जाता है कि (2·1) - (2·3) में आये विभिन्न समाकलों का अस्तित्व हो तथा (2·1) – (2·3) के बाईं ओर की श्रेणियाँ परम अभिसारी हों।

(2·1) की उपपत्ति:

यदि हम

$$\phi(r,\theta)=\cos 2u\theta \sin\theta^{2\xi}\, {}_PF_Q\left(\begin{matrix}(M_j)_{1,P};\\(N_j)_{1,Q}\end{matrix}\; a\sin\theta^{2h}\right)$$
$$\times H_1\,[br^{2\rho_1}\sin\theta^{2k},\ c\,r^{2\rho_2}\sin\theta^{2K'}] \quad \ldots \quad (2\cdot4)$$

को विख्यात समाकल में रखें

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x^2+y^2)\phi(v\sqrt{(x^2+y^2)},\ \tan^{-1} y/x)\,dx\,dy$$
$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\,F(v\sqrt{t})\,dt \quad \ldots \quad (2\cdot5)$$

जहाँ
$$F(r)=\int_0^{\pi/2} \phi(r, \theta)\, d\theta \quad \ldots \quad (2.6)$$

तथा $x=r \cos \theta, y=r \sin \theta$ और $t=r^2$

तो हमें

$$F(r)=\int_0^{\pi/2} \cos 2u\ \theta \sin \theta^{2\xi}\ {}_PF_Q\left(\begin{matrix}(Mj)_{1, P}\\(N_j)_{1, Q}\end{matrix}; a \sin \theta^{2h}\right) \times H_1\,[b\, r^{2\rho_1} \sin \theta^{2k}, c\, r^{2\rho_2} \sin \theta^{2K'}]\, d\theta \quad \ldots \quad (2\cdot7)$$

प्राप्त होता है।

अब (2·7) द्वारा व्यक्त समाकल का मान ज्ञात करने के लिये ${}_PF_Q$ को हम घातांक श्रेणी[1] के रूप में व्यक्त करते हैं, समाकलन और संकलन के क्रम को परस्पर बदलते हैं और इस प्रकार से प्राप्त समाकल का मान कौल[3] द्वारा प्राप्त फल की सहायता से निकालने पर

$$F(r)=\frac{\Gamma(1/2\pm u)}{2^{2\xi+1}} \sum_{R=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{P} (M_j)_R}{\prod_{j=1}^{Q} (N_j)_R} \frac{a^R}{R!} \frac{1}{4^{hR}}$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\binom{0,\ n_1+1}{p_1+1,\ q_1+2} \\ \ldots \\ \ldots\end{matrix}\ \left|\ \begin{matrix}(-2\xi-2hR;\ 2K,\ 2K'),\ (a_j;\ \alpha_j,\ A_j)_{1,\ p_1} \\ (-\xi-hR\pm u;\ K'),\ (b_j;\ \beta_j,\ B_j)_{1,\ q_1} \\ \ldots \\ \ldots\end{matrix}\ \right|\ \begin{matrix}\dfrac{br^{2\rho_1}}{4^{K}} \\ \dfrac{cr^{2\rho_2}}{4^{K'}}\end{matrix}\right] \quad (2\cdot8)$$

बशर्ते कि

$$Re\,[2\xi+2K(d_i/\delta_j)+2K'(f_j/F_j)+1]>0 (i=1, \ldots, m_2; j=1, \ldots, m_3)$$

(2·5) में (2·8) से प्राप्त $F(\sqrt{t})$ का मान रखने पर हमें (2·1) प्राप्त होता है।

(2·2) तथा (2·3) में दिये गये फलों को भी इसी प्रकार स्थापित किया जा सकता है यदि (2·4) के बजाय $\phi(r, \theta)$ को निम्नांकित दो फलनों के रूप में ग्रहण करें:

$$\phi_1(r, \theta)=\cos 2u\ \theta \sin \theta^{-2\xi}\ {}_PF_Q\left(\begin{matrix}(M_j)_{1, P}\\(N_j)_{1, Q}\end{matrix}; a \sin \theta^{-2h}\right) \times H_1\,[br^{2\rho_1} \sin \theta^{-2K}, cr^{2\rho_2}]\, d\theta \quad \ldots \quad (2\cdot9)$$

तथा

$$\phi_2(r, \theta)=\sin (2u+1)\, \theta \sin \theta^{1-2\xi}\ {}_PF_Q \begin{pmatrix}(M_j)_{1, P}; a \sin \theta^{-2h} \\ (N_j)_{1, Q}\end{pmatrix} \times H_1\, [br^{2\rho_1} \sin \theta^{-2K}, c\, r^{2\rho_2}]\, d\theta \quad . . . \quad (2\cdot10)$$

3. **सम्प्रयोग:**

(2·1) से (2·3) तक समाकल सम्बन्ध में आये हुये फलन $f(t)$ की यादृच्छिक प्रकृति के कारण $f(t)$ का सही सही चुनाव करके कई द्विगुण समाकल स्थापित किये जा सकते हैं।

अतः यदि हम

$$f(t)=t^{\delta-1}\ H_{p, q}^{m, 0}\left[\alpha t \,\middle|\, \begin{matrix}(g_j, G_j)_{1, p} \\ (1_j, L_j)_{1, q}\end{matrix}\right] \quad . . . \quad (3\cdot1)$$

लें जहाँ (3·1) के दाहिनी ओर हुये आया हुआ H-फलन (2 1), (2·2) तथा (2·3) में फाक्स के H-फलन[2] के लिये प्रयुक्त हुआ है। हम ज्ञात फल[4] के सहारे निम्नांकित रोचक समाकल प्राप्त करते हैं।

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cos (2u \tan^{-1} y/x)\ \frac{y^{2\xi}}{(x^2+y^2)^{\xi-\delta+1}}\ {}_PF_Q \begin{pmatrix}(M_j)_{1, P}; & \dfrac{ay^{2h}}{(x^2+y^2)^h} \\ (N_j)_{1, P} & \end{pmatrix}$$

$$\times H_{p, q}^{m, 0}\left[\alpha(x^2+y^2) \,\middle|\, \begin{matrix}(g_j, G_j)_{1, p} \\ (1_j, L_j)_{1, q}\end{matrix}\right] H_1 \left[\frac{by^{2K}}{(x^2+y^2)^{K-\rho_1}}, \frac{cy^{2K'}}{(x^2+y^2)^{K'-\rho_2}}\right] dx\, dy$$

$$=\frac{\Gamma(1/2\pm u)}{2^{2\xi+2}} \sum_{R=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{P} (M_j)_R}{\prod_{j=1}^{Q} (N_j)_R} \cdot \frac{a^R}{R!} \frac{\alpha^{-\delta}}{4^{hR}}$$

$$\times H \left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0, n_1+m+1 \\ p_1+q+1, q_1+p+2\end{pmatrix} \\ \cdots \\ \cdots\end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix}(-2\xi-2\, hR; 2K, 2K'), L \\ (-\xi-hR\pm u; K, K'),\ M \\ \cdots \\ \cdots\end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix}\dfrac{b}{4^K\alpha^{\rho_1}} \\ \dfrac{c}{4^{K'}\alpha^{\rho_2}}\end{matrix}\right] \quad (3\cdot2)$$

जहां L तथा M क्रमश:

$(1-1_j-\delta\, L_j; \rho_1 L_j, \rho_2 L_j)_{1, m}, (a_j; \alpha_j, A_j)_{1, p_1},$

$(1-1_j-\delta_j; \rho_1 L_j, \rho_2 L_j)_{m+1, q}$ तथा

$(b_j; \beta_j, B_j)_{1, q_1}, (1-g_j-\delta\, G_j; \rho_1 G_j, \rho_2 G_j)_{1, p}$

के लिये आये हैं बशर्ते कि

$$Re\,[\delta+1_i/L_i+\rho_1(d_j/\delta_j)+\rho_2(f_k/F_k)]>0 \quad \ldots \quad (a)$$

$$(i=1, 2, \ldots, m;\, j=1, 2, \ldots, m_2;\, K=1, 2, \ldots, m_3)$$

तथा

$$A=\sum_{j=1}^{m}(L_j)-\sum_{j=1}^{p}(G_j)-\sum_{j=m+1}^{q}(L_j)>0, \quad \ldots \quad (b)$$

$$|\arg \alpha|<1/2\,A\pi, \quad \ldots \quad (c)$$

$$\sum_{j=1}^{q}(L_j)-\sum_{j=1}^{p}(G_j)>0 \quad \ldots \quad (d)$$

और (3·2) के वामपक्ष की श्रेणी परम अभिसारी है।

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \cos(2u\tan^{-1}y/x)\,\frac{y^{-2\xi}}{(x^2+y^2)^{-\xi-\delta+1}}\,{}_PF_Q\left(\begin{matrix}(M_j)_{1,P};\\(N_j)_{1,Q}\end{matrix}\;\frac{ay^{-2h}}{(x^2+y^5)^{-h}}\right)$$

$$\times H_{p,q}^{m,o}\left[\alpha(x^2+y^2)\,\middle|\,\begin{matrix}(g_j, G_j)_{1,p}\\ \\(1_j, L_j)_{1,q}\end{matrix}\right]H_1\,[by^{-2k}(x^2+y^2)^{k+\rho_1},\, c(x^2+y^2)^{\rho_2}]\,dx\,dy$$

$$=\frac{\Gamma(1/2)}{4}\sum_{R=1}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{P}(M_j)_R}{\prod_{j=1}^{Q}(N_j)_R}\,\frac{a^R}{R!}\times\alpha^{-\delta}$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\begin{pmatrix}0,\,n_1+m\\p_1+q,\,q_1+p\end{pmatrix}\\ \\ \begin{pmatrix}m_2+1,\,n_2+1\\p_2+2,\,q_2+2\end{pmatrix}\\ \ldots\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}L\\ M\\ (1-\xi-hR-u,\,K),\,(c_j, r_j)_{1,p_2},\,(1-\xi-hR+u,\,K)\\(1/2-\xi-hR,\,K),\,(d_j, \delta_j)_{1,q_2},\,(1-\xi-hR,\,K)\\ \ldots\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{b}{\alpha^{\rho_1}}\\ \\ \frac{c}{\alpha^{\rho_2}}\end{matrix}\right] \quad \ldots \quad (3{\cdot}3)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \sin\{(2u+1)\tan^{-1}y/x\}\,\frac{y^{1-2\xi}}{(x^2+y^2)^{3/2-\xi-\delta}}\,{}_PF_Q\left(\begin{matrix}(M_j)_{1,P};\\(N_j)_{1,Q}\end{matrix}\;\frac{ay^{-2h}}{(x^2+y^2)^{-h}}\right)$$

$$\times H_{p,q}^{m,o}\left[\alpha(x^2+y^2)\,\middle|\,\begin{matrix}(g_j, G_j)_{1,p}\\ \\(1_j, L_j)_{1,q}\end{matrix}\right]H_1\,[by^{-2K}(x^2+y^2)^{\rho_1+K},\, c(x^2+y^2)^{\rho_2}]\,dx\,dy$$

$$=\frac{\Gamma(1/2)}{4}\sum_{R=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{P}(M_j)_R}{\prod_{j=0}^{Q}(N_j)_R}\frac{a^R}{R!}a^{-\delta}$$

$$\times H\left[\begin{matrix}\binom{0,\, n_1+m}{p_1+q,\, q_1+p}\\ \binom{m_2+1,\, n_2+1}{p_2+2,\, q_2+2}\\ \cdots\end{matrix}\left|\begin{matrix}L\\ M\\ (1-\xi-hR-u, K), (c_j, r_j)_{1, p_2}, (2-\xi-hR+u, K)\\ (3/2-\xi+hR, K), (d_j, \delta_j)_{1, q_2}, (1-\xi-hR, K)\\ \cdots\end{matrix}\right|\begin{matrix}\frac{b}{a^{\rho_1}}\\ \frac{c}{a^{\rho_2}}\end{matrix}\right]$$

जहाँ (3·3) तथा (3·4) में आये L, M (3·2) में दिये गये मानों के लिये प्रयुक्त हैं: (3·3) तथा (3·4) की वैधता के प्रतिबन्ध यह हैं: (3·2) में कथित प्रतिबन्ध तुष्ट हों तथा (3·3) तथा (3·4) के दाहिनी ओर की श्रेणियां परम अभिसारी हों।

विशिष्ट दशायें

चूंकि (3·2), (3·3) तथा (3·4) के समाकल्य में आया H-फलन कई प्रकार के विशिष्ट फलनों-बेसिल फलन J_ν, K_ν, ह्विटेकर फलन तथा माइजर का G-फलन इत्यादि को अपनी विशिष्ट दशाओं के रूप में समाविष्ट करता है जैसा कि गुप्ता तथा जैन[2] ने इंगित किया है अत: उपर्युक्त फलन वाले अनेक समाकल H-फलन के प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा हमारे फलों की विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं।

इस प्रकार इस शोधपत्र के (3·2) से लेकर (3·4) तक के सूत्र कुंजी स्वरूप हैं जिनसे कई विशिष्ट फलनों वाले अनेक सरलतर फल उनके प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा ही प्राप्त किये जा सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० के० सी० गुप्ता का अत्यन्त आभारी है जिन्होने इस शोधपत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Higher Transcendental Functions. **भाग I मैकग्राहिल, न्यूयार्क** 1953
2. गुप्ता, के० सी० तथा जैन, यू० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस**, 1960, **36(A)**, 595-606
3. कौल, सी० एल०, **प्रोसी० इंडियन एके० साइंस**, 1972, **75(A)** 29-38
4. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **वही**, 1972, **75(A)**, 117-123

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 18, No 4, October, 1975, Pages 333-337

फलन समष्टि में स्थिर बिन्दु प्रमेय

के० पी० गुप्ता
पी० के० गर्ल्स हायर सेकंडरी स्कूल, रीवाँ, म० प्र०

[प्राप्त—मई 27, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य बानाच के संकुचन सिद्धान्त की प्रविधि द्वारा गेज कल्प संरचना वाले फलन समष्टि में एक स्थिर बिन्दु प्राप्त करना है। गेज कल्प संरचना का श्रेय रेली [3] को है। इस शोधपत्र में सुब्रामन्यन[6] तथा अन्य लेखकों (सिंह[5] तथा कन्नन[1, 2]) के द्वारा प्रयुक्त किये गये बानाच संकारक का सम्प्रयोग किया गया है।

Abstract

Fixed point theorem in function space related to Banach's contraction principle. *By* K. P. Gupta, P. K. Girls Higher Secondary School, Rewa, M. P.

The purpose of this paper is to obtain the fixed point function space having quasi-gauge structure with the technique of Banach's contraction principle. The quasi-gauge structure is due to Reilly[3]. In the present paper we apply the Banach Operator as exploited by Subrahmanyam[6] in his recent paper as well as by many (authors Singh[5] and Kannan[12])

रेली ने यह दिखलाया है कि प्रत्येक सांस्थितिक समष्टि गेज-कल्प संरचना है। अब हम एक अनृण वास्तविक फलन p की कल्पना समष्टि y^x में करेंगे जिसकी बिन्दुशः संस्थिति है (जहाँ x तथा y अरिक्त समुच्चय हैं)। यह y^x में संस्थिति छद्मदूरी कल्प कहलाती है और $p(f, g)(x) = \sup(f(x)$ $g(x)$ के रूप में परिभाषित होकर $p(f, f) = 0$ y^x प्रत्येक f की तथा $p(f, g)(x) \leqslant p(f, h)(x) + p(h, g)(x)$ y^x में सभी तत्वों f, g, h की तुष्टि करती है।

परिभाषा 1. सांस्थितिक समष्टि (y^x, p) के लिये गेज कल्प संरचना परिवार y^x पर छद्मदूरी कल्प का परिवार p है जिससे कि P का उपआधार एक परिवार $\{B(f, p\, \epsilon) : f \in Y^X, p \in P, \epsilon > 0\}$ जहाँ $B(f, p, \epsilon)$ एक समुच्चय $\{f \text{ in } Y^X / p(f, g)(x) < \epsilon\}$ हो। यदि कोई सांस्थितिक समष्टि (Y^X, P)

की गेज-कल्प संरचना हो तो इसे गेज कल्प समष्टि कहते हैं और (Y^X, P) द्वारा व्यक्त करते हैं। इसके अतिरिक्त यदि (Y^X, P) दूरीकनीय हो तो हम मान लेते हैं कि P में केवल d रहता है।

परिभाषा 2: यदि (Y^X, P) गेज कल्प समष्टि हो तो y^x में अनुक्रम $\{fn\}$ वाम P-कॉंची कहलाता है जहाँ प्रत्येक P में p तथा प्रत्येक $\epsilon > 0$ के लिये y^x में f तथा पूर्णांक K होता है जिससे कि $p(f, f_m)(x) < \epsilon$ जो समस्त $m \geqslant K$ के लिये है (f तथा $K \epsilon$ तथा p पर आश्रित हो सकते हैं।

उदाहरण : माना कि Y^X वास्तविक फलन का $[0, 1] \to R$ समुच्चय है और y^x पर छद्मकल्प दूरीक P की परिभाषा

$$p(f, g)(x) = \begin{cases} \text{Sup } (f(x), g(x)) \text{ यदि } f(x) \geqslant g(x) \\ 1 \text{ यदि } f(x) < g(x). \end{cases}$$

द्वारा दी जाती है।

यदि हम $f_k(n) = \frac{1}{nk}$, $n = 1, 2, \ldots$; $p(f_k(n_0), f_k(n))(x) < \frac{1}{n_0}$ समस्त $n \geqslant n_0$ के लिये, पर विचार करें तो अनुक्रम $f_k(n) = \frac{1}{nk}$ y^x में वाम P-कॉंची होगा। किन्तु यह अनुक्रम दक्षिण P-कॉंची नहीं है क्योंकि $p(f_m, f) = 1$, y^x में प्रत्येक f के लिये एक अवस्था के बाद अनुक्रम $\{f_k(n)\} = \left\{1 - \frac{1}{nk}\right\}_{n=2}^{\infty}$ दक्षिण P-कॉंची है क्योंकि $p(f_k(m), f_k(n_0))(x) < \frac{1}{n_0 k}$ जहाँ $f_k(m) = 1 - \frac{1}{mk}$ और $m \geqslant n_0$. किन्तु y^x में प्रत्येक f के लिये $p(f, f_m)(x) = 1$, क्योंकि एक अवस्था के बाद $f_m(x) > f(x)$ अत: $\left\{1 - \frac{1}{nk}\right\}_{n=2}^{\infty}$ वाम P-कॉंची अनुक्रम नहीं है।

परिभाषा 3: गेज कल्प समष्टि (Y^X, P) अनुक्रमत: वाम (दक्षिण) पूर्ण होता है यदि प्रत्येक y^x में वाम (दक्षिण) P-कॉंची अनुक्रम y^x के किसी तत्व में अभिसरण करे।

परिभाषा 4: संकारक गेज कल्प समष्टि (Y^X, P) में कोई संकारक K प्रकार का वाम बानाच संकारक कहलाता है यदि P में प्रत्येक p के लिये K का अस्तित्व हो (P पर निर्भर करता है) जिससे कि $0 \leqslant K < 1$ और Y^X में y के लिये $p(T(f), T^2(f))(x) \leqslant K\, p(f, T(f))(x)$. T K प्रकार का दक्षिण बानाच संकारक कहलाता है यदि P में प्रत्येक p के लिये R का अस्तित्व हो (p पर निर्भर) जिससे कि $0 \leqslant K < 1$ तथा Y^X में समस्त f के लिये $p(T^2(f), T(f)(x) \leqslant K\, p(T(f), f)(x)$.

प्रमेय :

माना T अपने आप में एक संतत वाम (दक्षिण) बानाच संकारक है जो हाउसडार्फ वाम (दक्षिण) अनुक्रमशः पूर्ण गेज कल्प समष्टि (y^x, P) पर है तो T का स्थिर बिन्दु होता है।

उपपत्ति :

हम यहाँ पर वाम वानाच संकारक के लिये प्रमेय सिद्ध करेंगे और दक्षिण बानाच संकारक को छोड़ देंगे। विस्तृत विवरण एक से हैं।

यदि P में प्रत्येक p के लिये y^x में f है तो आगमन से यह अनुसरण होता है कि

$$p(T^n(f),\ T^{n+1}(f))(x) \leqslant K^n p(f,\ T(f))(x). \tag{1}$$

माना कि m तथा n ऐसे दो धन पूर्णांक हैं कि $m>n$, और भी माना कि

$$p(f,\ T(f))(x) = \text{Sup}\ (f(x),\ T(f(x)).$$

तो

$$p(f,\ T(f))(x) = \text{Sup}\ (f(x),\ T(f)(x)) \tag{2}$$

$$p(T(f),\ T^2(f))(x) \leqslant K\,p(f,\ T(f))(x) \leqslant K\ \text{Sup}\ (f(x),\ T(f(x))) \qquad ((1) \text{ और } (2) \text{ से })$$

इसी प्रकार

$$p(T^n(f),\ T^m(f))(x) \leqslant \sum_{i=1}^{m-n} p(T^{n+i-1}(f),\ T^{n+i}(f)(x)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m-n} K^{n+i-1}\ p(f,\ T(f))(x)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m-n} K^{n+i-1}\ \text{Sup}\ (f(x),\ T(f(x)))$$

चूँकि $0 \leqslant K < 1$ P में p से सम्बद्ध प्रत्येक p के लिये $\sum_{i=1}^{n} K^i$ अभिसारी है अतः यह वास्तविक संख्याओं का कॉंची अनुक्रम है। दिया हुआ है कि $\epsilon>0$ अतः हम n को ज्ञात कर सकते हैं जिससे कि समस्त $m \geqslant n$ के लिये $\sum_{i=0}^{m-n} K^{n+i}\ \text{Sup}\ (f(x),\ Tf(x)) < \epsilon$. अतः $p(T^n(f),\ T^m(f))(x) < \epsilon$ समस्त $m \geqslant n$ के लिये। अतः P तथा $\epsilon>0$ में प्रत्येक p लिये हम f को $T^n(f)$ के रूप में चुन सकते हैं और देखेंगे कि $\{T^n(f)\}$ वास्तव में वाम P-कॉंची अनुक्रम है (परिभाषा 2 के अनुसार)। चूँकि $(Y^X,\ P)$ वाम अनुक्रम से पूर्ण है $T^n(f)$ y^x में किसी g से अभिसारी है। चूँकि T एक संतत संकारक है, अतः $\{T^{n+1}(f)\}$ $T(g)$ में अभिसरण करता है। $\{T^{n+1}(f)\}\{T^n(f)\}$ का उपअनुक्रम है तथा y^x हाउसडार्फ समष्टि है जिसका यह अर्थ होता है कि $T(f(x))=f(x)$। चूँकि यह x के चुनाव पर आश्रित नहीं है

$$T(f)=f$$

अतः यही अभीष्ट प्रमेय है।

उपप्रमेय 1 :

यदि गेज कल्प समष्टि (y^x, P) में T एक संकुचनशील संकारक हो (Y^X, P) (अर्थात् प्रत्येक $p \in P$ के लिये तथा कुछ $K)$ (p पर निर्भर) साथ ही $0 \leqslant K < 1, p(Tf(x), Tg(x)) \leqslant K_p(f, g)(x)$ समस्त f के लिये Y^X में g के लिये तो y^x में T का एक अद्वितीय स्थिर बिन्दु होता है बशर्ते कि Y^X एक वाम (दक्षिण; अनुक्रमशः पूर्ण हाउसडार्फ समष्टि हो ।

उपपत्ति :

यह सरलता से देखा जा सकता है कि T संतत है और प्रमेय 1 की संकल्पना की तुष्टि करता है । अतः T का एक स्थिर बिन्दु होता है । चूँकि y^x हाउसडार्फ है अतः स्थिर बिन्दु की अद्वितीयना सुस्पष्ट है ।

उपप्रमेय 2 :

यदि पूर्ण दूरीकनीय समष्टि (y^x, d) में T एक संतत बानाच सकारक हो तो T का एक स्थिर बिन्दु होता है ।

उपप्रमेय 3 :

यदि T पूर्ण दूरीकनीय समष्टि में एक ऐसा संकारक हो कि T^m संतत बानाच संकारक हो जिसमें अधिकतम एक स्थिर बिन्दु हो तो T में अद्वितीय स्थिर बिन्दु होता है ।

उपपत्ति :

प्रमेय 1 के उपप्रमेय 2 से T^m के एक स्थिर बिन्दु f होता है जो (हमारी मान्यता से) अद्वितीय है । चूँकि

$$f(x) = T(f)\ (x),\ T(f)(x) = T^{m+1}(f)(x) =)\ T^m(T(f))(x)$$

और T का स्थिर बिन्दु अद्वितीय है, इसका यही अर्थ होता है कि $T(f)(x) = f(x)$ । यह समस्त x के लिये सत्य है अतः $T(f) = f$.

टिप्पणी : यदि T में एक से अधिक स्थिर बिन्दु होते हैं तो उपप्रमेय निष्फल हो जाती है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

मैं डा० आर० सी० वर्मा तथा श्री एन० पी० एस० बावा का अत्यन्त कृतज्ञ हूँ जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में परामर्श दिया ।

निर्देश

1. कन्नन, आर०, **कलकत्ता मैथ० सोसा०** 1968, **60**, 71-76.
2. वही, **अमेरिकन मैथ० मंथली**, 1969, **76**,405-8.
3. रेली, आई० एल०, A Generalized Contraction Principle, Report series no. 9, **यूनीवर्सिटी आफ आकलैंड न्यूजीलैंड, गणित विभाग**
4. वही, **जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०**, 1973, 6, 481-87.
5. सिंह, एस० पी०, **ओयोकोहामा मैथ० जर्न०**, 1969, **17**, 61-64,
6. सुब्रामन्यम, पी० वी०, **जर्न० मैथ एण्ड फिजि० साइं०**, 1974, **8**, 445-57.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 4, October 1975, Pages 339-345

(Gx_n), लोमेल, मैटलैंड फलनों के गुणनफल वाले समाकल

ओ० पी० गर्ग

गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—जून 19, 1974]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में n-चरों वाले माइजर के G-फलन अर्थात् $G(x_n)$ तथा लोमेल, मैटलैंड फलनों के गुणनफल वाले कतिपय समाकलों का मान निकाला गया है। कई रोचक विशिष्ट दशायें भी दी गई हैं।

Abstract

Integrals involving the products of $G(x_n)$, Lommel, Maitland functions. *By* O. P. Garg, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

In this paper some integrals involving the products of Meijer G-function of n variables i.e. $G(x_n)$ and Lommel, Maitland functions have been evaluated. A number of interesting particular cases are also given.

1. विषय-प्रवेश

खाडिया तथा गोयल[3] ने n-चरों वाले सार्वीकृत फलन को निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया है।

$$G^{m,\,o;\,(M_n),\,(N_n)}_{p,\,q;\,(P_n),\,(Q_n)}\left[(x_n)\,\middle|\,\begin{matrix}[(a_p);\,(b_q)]\\ \left\{\left(\left(c^{n}_{P_n}\right)\right),\left(\left(d^{n}_{n}\right)\right)\right\}\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{(Ln)}\phi(\Sigma S_k)\psi(S_k)\prod_{k=1}^{n} d\,s_k \qquad (1\cdot1)$$

जहाँ

$$\phi(\Sigma S_k)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j+\sum_{k=1}^{n}s_k)}{\prod_{j=1+m}^{p}\Gamma(1-a_j-\sum_{k=1}^{n}s_k)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+\sum_{k=1}^{n}s_k)} \tag{1·2}$$

$$\psi(S_k)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\prod_{j=1}^{M_k}\Gamma(1-c^k_j+s_k)\prod_{j=1}^{N_k}\Gamma(d^k_j-s_k)\,x_k^{s_k}}{\prod_{j=1+M_k}^{P_k}\Gamma(c^k_j-s_k)\prod_{j=1+N_k}^{Q_k}\Gamma(1-d^k_j+s_k)} \tag{1·3}$$

$$\prod_{k=1}^{n}(ds_k)=ds_1\,.\,ds_2\,.\,ds_3\,.\,.\,ds_n. \tag{1·4}$$

(a_n) द्वारा अनुक्रम $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $\left(\left(c^n_{P_n}\right)\right)$ द्वारा अनुक्रम $\overset{1}{c_1}, \overset{1}{c_2}, \ldots, \overset{1}{c}_{P_1}; \overset{2}{c_1}, \overset{2}{c_2} \ldots; \overset{2}{c}_{P_2}, \ldots, \overset{n}{c_1}, \overset{n}{c_2}, \ldots, \overset{n}{c}_{P_n}$ प्रदर्शित किये गये हैं, (L_n) n उपयुक्त कंटूर हैं तथा धनात्मक पूर्णांक $p, P_1, P_2, \ldots, P_n; q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, m, M_n, \ldots, N_1, \ldots, N_n$ निम्नांकित असमिकाओं की तुष्टि करते हैं

$$p\geqslant 0,\ q\geqslant 0;\ Q_k\geqslant 1,\ 0\leqslant M_k\leqslant P_k,\ p+P_k\leqslant q+Q_k \tag{1·5}$$
$$k=1, 2, \ldots, n.$$

$x_k=0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ मानों की उपेक्षा की गई है।

कंटूर L_k s_k तल में है और अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण हैं और आवश्यकता पड़ने पर आश्वस्त हुआ जा सकता है कि $\Gamma(d^k_j-s_k), j=1, 2, \ldots, N_k$ के पोल दाईं ओर तथा $\Gamma(1-c^k_j+s_k), j=1, 2, \ldots, M_k$ और $\Gamma(a_j+\Sigma s_k), j=1, 2, \ldots, m$ के पोल कंटूर L_k के बाईं ओर पड़ें जहाँ $k=1, 2, \ldots, n$

परिभाषित समाकल (1·1) (x_k) का वैश्लेषिक फलन है बशर्ते कि

$$|\arg x_k|<(m+M_k+N_k-\tfrac{1}{2}q-\tfrac{1}{2}Q_k-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}P_k)\pi \tag{1·6}$$

तथा
$$2(m+M_k+N_k)=q+Q_k+p+P_k \tag{1·7}$$

(जहाँ $k=1, 2, \ldots, n$).

2. संकेतन तथा ज्ञातफल

अग्रवाल तथा गोयल के अनुसार हम संकेतों का प्रयोग निम्न प्रकार से करते हैं

$$R(x)=e^{x^2/2}W_{\rho,\,\sigma}(x^2)\,J^{\mu'}_{\nu,\,\lambda'}(ax) \tag{2·0}$$

$$\int_0^\infty R(x)\,f(x)\,dx=R_*^*(f) \tag{2·1}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^{-\mu'/2}\,P_\nu^{\mu'}(y)\,J_{\beta,\gamma'}^{a}(px^{1/2})\,f(x)dx=J_*^*(f) \tag{2·2}$$

$$\int_0^2 (4-x^2)^{-1/2}\,T_k\left(\frac{1}{2x}\right)\,J_{\nu,\lambda'}^{\mu'}(ax)\,f(x)\,dx=T_*^*(f) \tag{2·3}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,J_{\nu,\lambda'}^{\mu'}(bx)\,f(x)\,dx=J_*^{**}(f) \tag{2·4}$$

$$\frac{\nu}{2}+\frac{p}{2}+\lambda'+r+\sigma+\tfrac{1}{2}=U_1 \tag{2·5a}$$

$$\frac{\nu}{2}+\frac{p}{2}+\lambda'+r-\sigma+\tfrac{1}{2}=U_2 \tag{2·5b}$$

$$\frac{\nu}{2}+\frac{p}{2}+\lambda'+r-\rho+1=V \tag{2·6}$$

$$\phi^*=\phi^*\begin{pmatrix} a,\ \mu',\ r \\ k,\ \nu,\ \lambda' \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu+2\lambda'}\left[-\frac{a^2}{4}(\mu')^{-\mu'}\right]^r}{\Gamma(1+\lambda'+\nu)\Gamma(1+\lambda'+r)\prod_{k=1}^{\mu'}\left(\frac{k+\nu+\lambda'}{\mu'}\right)_r} \tag{2·7}$$

$$W_{0,\mu'}(x)\left(\frac{x}{\pi}\right)^{1/2}K_{\mu'}\left(\frac{x}{2}\right) \tag{2·8}$$

$$W_{\rho,1/4}(x)=2^{-\rho}\,(2x)^{1/4}\,D_{2\rho-1/2}(\sqrt{2}x) \tag{2·9}$$

$$W_{n/2+1/4,\pm 1/4}(x)=2^{-n/2}\,x^{1/4}\,e^{-x/2}\,\text{Hen}\,(\sqrt{2}x) \tag{2·10}$$

$$W_{\sigma+n+1/2,\ \pm\sigma}(x^2)=(-1)^n\,n\,!\,(x)^{2\sigma+1}\,e^{-x^2/2}\,L_n^{2\sigma}\,(x^2) \tag{2·11}$$

$$J_{\nu,\lambda'}^{1}(ax)=\frac{2^{2-\nu-2\lambda'}}{\Gamma(\lambda')\Gamma(\nu+\lambda')}\,S_{\nu+2\lambda'-1,\,\nu}(ax) \tag{2·12}$$

$$J_{\nu,0}^{\mu'}(ax)=\left(\frac{ax}{2}\right)^{\nu}J_{\nu}^{\mu'}\left(\frac{a^2x^2}{4}\right) \tag{2·13}$$

$a>0$, $R(\nu+p+1+2\lambda'\pm 2\sigma)>0$ तथा μ' एक धनपूर्णांक है। (2·14)

(2·0) से (2·6) तक उपर्युक्त संकेतनों का प्रयोग करने पर पाठक[6] के समाकलों को पुनः निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$R_*^*(x^{p-1}) = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}a)^{\nu+2\lambda'}\,\Gamma(U-r)}{\Gamma(1+\lambda')\Gamma(1+\lambda'+\nu)\Gamma(V-r)}$$

$${}_3F_{\mu'+2}\left[\begin{matrix} 1,\, U-r & ; -\frac{a^2}{4}(\mu')^{-\mu'} \\ 1+\lambda',\, V-r,\, \frac{1+\nu+\lambda'}{\mu'},\frac{2+\nu+\lambda'}{\mu'},\ldots,\frac{\mu'+\nu+\lambda'}{\mu'} & \end{matrix}\right] \quad (21{\cdot}5)$$

(2·14) लागू होता है।

$$J_*^*(x^\rho) = \frac{\sqrt{\pi}(p)^{\beta+2\gamma'}}{(2)^{3/2\beta+3\gamma'+\rho-\mu'+1}}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{p^2}{8}\right)^r \Gamma\left(\frac{\beta}{2}+\rho+\gamma'+r+1\right)\, \Gamma\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\rho}{2}+\frac{\gamma'}{2}+\frac{r}{2}+1-\frac{\nu}{2}-\frac{\mu'}{2}\right)}{\Gamma(1+\gamma'+r)\Gamma(1+\gamma'+\beta+\alpha r)\,\Gamma\left(\frac{\beta}{4}+\frac{\rho}{2}+\frac{\gamma'}{2}+\frac{r}{2}+\frac{3}{2}+\frac{\nu}{2}-\frac{\mu'}{2}\right)}$$

$$p>0,\ \alpha>0,\ R(\beta+2\rho+2\gamma')>-2,\ R(\mu')<1 \quad (2{\cdot}16)$$

$$T_*^*(x^\rho) = \frac{\pi}{2}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r(\frac{1}{2}a)^{\nu+2r+2\lambda'}\Gamma(1+\rho+\nu+2r+2\lambda')}{\Gamma(1+\lambda'+r)\Gamma(1+\lambda'+\nu+\mu' r)\Gamma\left(1\pm\frac{n}{2}+\frac{\rho}{2}+\frac{\nu}{2}+r+\lambda'\right)}$$

$a>0,\ R(\nu+\rho+2\lambda')>-1$ तथा $\mu'>0$ (2·17)

$$J_*^{**}(x^{p-1}) = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2\lambda'}\Gamma\left(\frac{\nu+p}{2}+\lambda'\right)}{2(a)^{[(\nu+p)/2+\lambda']}\,\Gamma(1+\lambda')\Gamma(1+\lambda'+\nu)}$$

$${}_2F_{\mu'+1}\left[\begin{matrix} 1,\, \frac{\nu+p}{2}+\lambda; & -\frac{b^2}{4a}(\mu')^{-\mu'} \\ 1+\lambda',\, \frac{1+\lambda'+\nu}{\mu'},\, \frac{2+\lambda'+\nu}{\mu'},\ldots,\frac{\mu'+\lambda'+\nu}{\mu'} & \end{matrix}\right] \quad (2{\cdot}18)$$

$a>0, b>0,\ R(\nu+p+2\lambda')>0$ तथा μ' एक धनपूर्णांक है।

यदि m धनपूर्णांक हो तो

$$\Gamma(mz) = (2\pi)^{1/2(1-m)} m^{mz-1/2} \prod_{r=0}^{m-1} \Gamma\left(z+\frac{r}{m}\right) \quad (2{\cdot}19)$$

3. मुख्य फल जिन्हें सिद्ध करना है :

यदि (1·6), (1·7) तथा (2·14) सत्य हैं तो

$$R_*^*\left\{x^{p-1}G\begin{bmatrix} z^1x^2 \\ \vdots \\ z_n z^2\end{bmatrix}\right\} = \phi^*$$

$$G^{m+2,0;\,(M_n),\,(N_n)}_{p+2,\,q+1;\,(P_n),\,(Q_n)}\left[\begin{matrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[U_1, U_2, (A_p), V, (B_q)]\\ \left\{\left(\left(c^n_{P_n}\right)\right), \left(\left(d^n_{Q_n}\right)\right)\right\}\end{matrix}\right] \tag{3·1}$$

यदि (1·6), (1·7), $R(\beta+2\rho+2\gamma')>-2$, $R(\mu')<1$, $p>0$, $a>0$,

तो
$$J^*_*\left\{x^\rho G\begin{bmatrix}z_1x^2\\ \vdots\\ z_nx^2\end{bmatrix}\right\}=\theta_1\ G^{m+3,\,0;\,(M_n),\,(N_n)}_{p+3,\,q+1;\,(P_n),\,(Q_n)}\begin{bmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{matrix}[(\tfrac14\beta+\tfrac12\gamma'+\tfrac12r+\tfrac12\rho+\tfrac12),(\tfrac14\beta+\tfrac12\gamma'+\tfrac12r+\tfrac12\rho+1),\\ (\tfrac14\beta+\tfrac12\rho+\tfrac12\gamma'+\tfrac12r+1-\tfrac12\nu-\tfrac12\mu'),(A_p),(\tfrac14\beta+\tfrac12\rho+\tfrac12\gamma'+\tfrac12r+\tfrac32-\tfrac12\nu-\tfrac12\mu'),(B_q)]\\ \left\{\left(\left(c^n_{P_n}\right)\right), \left(\left(d^n_{Q_n}\right)\right)\right\}\end{matrix}\right]$$

जहाँ
$$\theta_1=\frac{p^{\beta+2\gamma'}}{2^{\beta+2\gamma'-\mu'+1}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{p^2}{8}\right)^r 2^r}{\Gamma(1+r+\gamma')\Gamma(1+\gamma'+\beta+ar)} \tag{3·2a}$$

यदि (1·6), (1·7), $R(\nu+\rho+2\lambda')>-1$, $a>0$ तथा $\mu'>0$

तो
$$T^*_*\left\{x^\rho\ G\begin{bmatrix}z_1x^2\\ \vdots\\ z_nx^2\end{bmatrix}\right\}=\theta_2\ G^{m+2,\,0;\,(M_n),\,(N_n)}_{p+2,\,q+2;\,(P_n),\,(Q_n)}$$

$$\left[\begin{matrix}4z_1\\ \vdots\\ 4z_n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[(r+\lambda'+\tfrac12\rho+\tfrac12\nu+\tfrac12),(r+\lambda'+\tfrac12\rho+\tfrac12\nu+1),\ (A_p),\\ (1+\tfrac12n+\tfrac12\rho+\tfrac12\nu+r+\lambda'),(1-\tfrac12n+\tfrac12\rho+\tfrac12\nu+r+\lambda'),\ (B_q)]\\ \left\{\left(\left(c^n_{P_n}\right)\right), \left(\left(d^n_{Q_n}\right)\right)\right\}\end{matrix}\right] \tag{3·3}$$

जहाँ
$$\theta_2=\pi^{1/2}\,2^{\rho-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\,(a)^{\nu+2r+2\lambda'}}{\Gamma(1+\lambda'+r)\Gamma(1+\lambda'+\nu+\mu'r)} \tag{3·3a}$$

यदि (1·6), (1·7) तथा $R(\nu+\rho+2\lambda')>0$, $a>0$, $\mu'>0$ तथा $\overline{\mu'}$ घनपूर्णांक है तो

$$J^{**}_*\left\{x^{p-1}\ G\begin{bmatrix}z_1x^2\\ \vdots\\ z_nx^2\end{bmatrix}\right\}=\theta_3\ G^{m+1,\,0;\,(M_n),\,(N_n)}_{p+1,\,q;\,(P_n),\,(Q_n)}\begin{bmatrix}az_1\\ \vdots\\ az_n\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{matrix}\left[\left(\frac{\nu+p}{2}+\lambda'+r\right), (A_p), (B_q)\right]\\ \left\{\left(\left(c^n_{P_n}\right)\right), \left(\left(d^n_{Q_n}\right)\right)\right\}\end{matrix}\right] \tag{3·4}$$

जहाँ
$$\theta_3=\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2\lambda'}}{2a^{(\nu+p/2)+\lambda'}\Gamma(1+\lambda'+\nu)}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{b}{4a}\right)^r(\mu'^{-\mu'})^r}{\Gamma(1+\lambda'+r)\prod_{R'=1}^{\mu'}\left(\frac{R'+\lambda'+\nu}{\mu'}\right)_r} \quad (3\cdot 4a)$$

उपपत्ति :

(3·1) को सिद्ध करने के लिये $G\begin{bmatrix} z_1x^2 \\ \vdots \\ z_nx^2 \end{bmatrix}$ को (1·1) द्वारा कंटूर समाकलनों द्वारा व्यक्त करते हैं, समाकल का क्रम परिवर्तित करते हैं जो कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अनुमत है, (2·15) की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान निकालते हैं, (2·19) का उपयोग करके (1·1) की सहायता से पुनः व्याख्या करते हैं तो तुरन्त ही (3·1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है ।

इसी प्रकार (3·2) से लेकर (3·4) तक की उपपत्ति दी जा सकती है । अन्तर केवल इतना ही है कि (2·15) के बजाय (2·16), (2·17) तथा (2·18) का उपयोग करते हैं ।

विशिष्ट दशायें :

(i) यदि $m=p=q=0$, तो n चरों वाला सार्वीकृत माइजर का G-फलन n एक चर वाले n माइजर के G-फलनों का गुणनफल हो जाता है इसलिये हमें एक समाकल प्राप्त होता है जिसमें n माइजर G-फलन तथा लामेल और मैटलैंड फलनों का गुणनफल रहता हैं ।

(ii) पुनश्च, यदि (i) में हम एर्डेल्यी[6] द्वारा दिये गये माइजर के G-फलन की विभिन्न दशायें लिखें तो हमें विशिष्ट फलनों वाले अनेक समाकल प्राप्त होते है ।

(iii) खाडिया[4] द्वारा दी गई $G(x_n)$ की विविध विशिष्ट दशाओं का प्रयोग करने पर हमें $\overset{n}{F_1}, \overset{n}{F_2}, \overset{n}{F_3}, \overset{n}{F_4}, \overset{n}{\phi_1}, \overset{n}{\phi_3}$ तथा n चरों वाले अन्य विशिष्ट फलनों से युक्त अनेक समाकल प्राप्त होते हैं ।

(iv) $\rho=0, \sigma=\frac{1}{4};\ \rho=\frac{n_1}{2}+\frac{1}{4}, \sigma=\frac{1}{4};\ \rho=\sigma+n_1+\frac{1}{2}, \mu'=1;\ \lambda'=0$ रखने पर तथा क्रमशः (2·8) से लेकर (2·13) तक का प्रयोग करने पर (2·8) से (2·13) में आये विविध विशिष्ट फलनों के लिये समाकल प्राप्त होते हैं ।

(v) यदि $(M_{3,\,n})=(N_{3,\,n})=(P_{3,n})=(Q_{3,\,n})=0$, तथा यदि हम सीमाओं को $(x_{3,\,n})\to 0$ के रूप में लें तो हमें शर्मा[5] द्वारा परिभाषित $S(x/y)$ सहित लोमेल, मैटलैंड फलनों के गुणनफलों वाला समाकल प्राप्त होता है । $S\binom{x}{y}$ के प्राचलों में तनिक हेरफेर से अग्रवाल[1] द्वारा परिभाषित $G\binom{x}{y}$ में समाकल प्राप्त होते हैं ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोध पत्र की तैयारी में डा० ए० एन० गोयल ने जो पथ-प्रदर्शन किया उसके लिये वे धन्यवाद के भागी हैं।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया**, 1965, **31A**, 536-46.
2. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental Functions, भाग I, **मैकग्राहिल**, 1953.
3. खाडिया, एस० एस० तथा गोयल, ए० एन०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1970, **13**, 191-201.
4. खाडिया, एस० एस०, **पी-एच० डी० थीसिस**, **राजस्थान विश्वविद्यालय**, 1971.
5. शर्मा, बी० एल०, Annals dek-La Societe Scientifique de Bruxells, 1965, **79**, **I**, 26-40.
6. पाठक, आर० एस०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस (इलाहाबाद)**, 1965, **35** (2), 214-20.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 4, October, 1975, Pages 347-352

दो चरों वाले माइजर का G-फलन: I

बी० एम० सिंघल
गणित विभाग, राजकीय विज्ञान महाविद्यालय, ग्वालियर

[प्राप्त—जनवरी 25, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में सिंहल द्वारा दी गई तत्समिका की सहायता से अग्रवाल द्वारा परिभाषित दो चरों वाले G-फलन के लिये अपरिमित प्रसार प्राप्त किया गया है। इसकी उपपत्ति में दो चरों वाले G-फलन का एक प्रमेय सम्मिलित है।

Abstract

On Meijer's G-function of two variables I. *By* B. M. Singhal, Department of Mathematics, Government Science College, Gwalior.(M. P.)

In the present paper, an infinite expansion for the G-function of two variables defined by Agrawal have been obtained with the help of an identity given by Singhal. The proof incorporates with a Theorem for the G-function of two variables.

1. भूमिका

हाल ही में अग्रवाल[1] द्वारा परिभाषित दो चरों वाले G-फलन सम्बन्धी कतिपय विशिष्ट अपरिमित श्रेणी प्रसार प्राप्त किये गये हैं[2]

$$G\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \equiv G^{n,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p,\ [t:\ t'],\ s,\ [\nu,\ \nu']}\left[\begin{array}{c|l} & (\epsilon_p) \\ x & (\gamma_t);\ (\gamma'_{t'}) \\ y & (\delta_s) \\ & (\beta_\nu);\ (\beta'_{\nu'}) \end{array}\right] \tag{1·1}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \phi(\xi+\eta)\psi(\xi,\ \eta)\ x^{\xi} y^{\eta}\ d\xi\ d\eta,$$

जहाँ
$$\phi(\xi+\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-\epsilon_j+\xi+\eta)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma[\epsilon_j-\xi+\eta]\prod_{j=1}^{s}\Gamma[\delta_j+\xi_f+\eta]},$$

$$\psi(\xi,\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{m_1}\Gamma[\beta_j-\xi]\prod_{j=1}^{\nu_1}\Gamma[\gamma j+\xi]\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma[\beta'j-\eta]\prod_{j=1}^{\nu_2}\Gamma[\gamma' j+\eta]}{\prod_{j=m_1+1}^{\nu}\Gamma[1-\beta_j+\xi]\prod_{j=\nu_1+1}^{t}\Gamma[1-\gamma_j-\xi]\prod_{j=m_2+1}^{\nu'}\Gamma[1-\beta'j+\eta]\prod_{j=\nu_2+1}^{t'}\Gamma[1-\gamma'j-\eta]},$$

तथा $\quad 0\leqslant m_1\leqslant\nu,\ 0\leqslant m_2\leqslant\nu',\ 0\leqslant\nu_1\leqslant t,\ 0\leqslant\nu_2\leqslant t',\ 0\leqslant n\leqslant p.$

यहाँ पर हमने $G\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ फलनों के लिये अग्रवाल के संकेतन[1] के स्थान पर वर्मा के संकेतन[3] का प्रयोग किया है।

$$G^{n,\ \nu_1,\ \nu_2,\ m_1,\ m_2}_{p,\ t,\ s,\ q}, \tag{1·2}$$

क्योंकि γ, γ' तथा β, β' प्राचलों को समान संख्या में होना आवश्यक नहीं है।

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य सिंहल[4] द्वारा दिये गये तत्समक के द्वारा दो चरों वाले G-फलनों के हेतु एक प्रसार प्राप्त करना है।

यदि $\quad F_2\,(d; b, b'; c, c'; x, y)\ F_2\,(e; b, b'; c, c'; x, y)$

$$=\sum_{M,N=0}^{\infty} A_{M,N}\, x^M y^N$$

तो
$$(1-x)^{-b}(1-y)^{-b'}\ F^{2,\ 2}_{2,\ 1}\begin{bmatrix}d,\ e\ :\ c-b,\ c'-b';\ b,\ b';\\ & \dfrac{-x^2}{4(1-x)},\ \dfrac{-y^2}{4(1-y)}\\ (d+e)/2,\ (d+e-1)/2\ :\ c;\ c';\end{bmatrix} \tag{1·3}$$

$$=\sum_{M,N=0}^{\infty}\frac{(c)_M(c')_N}{(d+e)_{M+N}}A_{M,N}x^My^N,$$

जहाँ F_2 दो चरों वाला ऐपेल का हाइपरज्यामितीय फलन[5] है तथा

$$F^{p,\ q}_{r,\ s}\begin{bmatrix}(a_p)\ :\ (b_q);\ (b'_q);\\ & x,\ y\\ (c_r)\ :\ (d_s);\ (d'_s);\end{bmatrix} \tag{1·4}$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{[(a_p)]_{m+n} [(b_q)]_m [(b'_q)]_n}{[(c_r)]_{m+n} [(d_s)]_m [(d'_s)]_n\, m!\, n!} x^m y^n,$$

जो पूर्णतया अभिसारी होता है यदि

(i) $p+q<r+s+1$ x तथा y के समस्त मानों के लिये

(ii) $p+q=r+s+1, x\neq r$, x तथा y के समस्त मानों के लिये उस क्षेत्र में जो $|x|^{1/p-r}+|y|^{1/p-r}=1$ तथा $|x|<1, |y|<1$, में उभयनिष्ट है तथा

(iii) $p+q=r+s+1, p=r$ क्योंकि $|x|<1, |y|<1$:

जहाँ (a_p) के द्वारा $a_1, a_2, \ldots, a_p$, अनुक्रम का बोध होता है।

इसकी उपपत्ति दो चरों वाले G-फलन के साथ सम्मिलित है।

2. सर्वप्रथम हम निम्नांकित प्रमेय की स्थापना करेंगे।

यदि $F_2(d; b, b'; c, c'; x, y)\, F_2(e; b, b'; c, c'; x, y)$

$$= \sum_{M,N=0}^{\infty} A_{M,N} x^M y^N$$

तो

$$\begin{cases} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{\sigma-1} (1-x)^{\mu-b-1} (1-y)^{r-b'-1} F \left[\begin{matrix} d, e : b, b'; c-b. c'-b'; \\ \frac{d+e}{2}, \frac{d+e-1}{2} : c; c'; \end{matrix} \quad \frac{-x^2}{4(1-x)}, \frac{-y^2}{4(1-y)}\right] G \begin{bmatrix} \lambda_1 x(1-y) \\ \\ \lambda_2 y(1-x) \end{bmatrix} dx\, dy \\ = \sum_{M,N=0}^{\infty} \frac{(c)_M (c')_N}{(d+e)_{M+N}} A_{M,N}\, G^{n,\, \nu_1+2,\, \nu_2+2,\, m_1,\, m_2}_{p,\, [t+2;\, t'+2],\, s+2,\, [\nu,\, \nu']} \left[\begin{matrix} & (\epsilon_p) \\ \lambda_1 & \sigma+M, r, (\gamma_t); \sigma+N, \mu, (\gamma'_{t'}) \\ \lambda_2 & (\delta_s), \sigma+M+\mu, \sigma+N+r \\ & (\beta_\nu) : (\beta'_{\nu'}) \end{matrix}\right] \end{cases}$$

(2·1) को स्थापित करने लिये (1.3) को गुणक

$$(xy)^{\sigma-1} (1-x)^{\mu-1} (1-y)^{r-1}\, G \begin{bmatrix} \lambda_1 x(1-y) \\ \\ \lambda_2 y(1-x) \end{bmatrix}$$

द्वारा गुणा करते हैं और सीमा (0, 1) में x तथा y के प्रति समाकलित करते हैं और दाहिनी ओर समाकलन और संकलन के क्रम को परिभाषा (1·1) के साथ साथ परिवर्तित करते हैं तो हमें दाहिना पक्ष प्राप्त होता है।

दाहिना पक्ष:

$$= \sum_{M,N=0}^{\infty} \frac{(c)_M(c')_N}{(d+e)_{M+N}} A_{M,N} \int_0^1 \int_0^1 x^{\sigma+M-1} y^{\sigma+N-1} (1-x)^{\mu-1}$$

$$\times (1-y)^{r-1} G \begin{bmatrix} \lambda_1 x(1-y) \\ \\ \lambda_2 y(1-x) \end{bmatrix} dx\, dy$$

$$= \sum_{M,N=0}^{\infty} \frac{(c)_M(c')_N}{(d+e)_{M+N}} A_{M,N} \int_{-i\infty}^{i\infty} \int_{-i\infty}^{i\infty} \phi(\xi+\eta)\psi(\xi, \eta)$$

$$\times \int_0^1 \int_0^1 x^{\sigma+M+\xi-1} y^{\sigma+N+\eta-1} (1-x)^{\mu+\eta-1} (1-y)^{r+\xi-1} dx\, dy\, d\xi\, d\eta,$$

आन्तरिक परिमित समाकलों का मान निकालने पर तथा (1·1) की परिभाषा का उपयोग करने पर हमें तुरन्त ही (2·1) प्राप्त होता है।

3. यदि हम (2·1) में, $b=c$, $b'=c'$ तथा $d=0$ रखते हैं तो हमें निम्नांकित रोचक समाकल प्राप्त होता है:

$$\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{\sigma-1} (1-x)^{\mu-c-1} (1-y)^{r-c'-1} G \begin{bmatrix} \lambda_1 x(1-y) \\ \\ \lambda_2 y(1-x) \end{bmatrix} dx\, dy \tag{3·1}$$

$$= \sum_{M,N=0}^{\infty} \frac{(c)_M(c')_N}{M!\, N!} G^{n,\ \nu_1+2,\ \nu_2+2,\ m_1,\ m_2}_{p,\ [t+2;\ t'+2],\ s+2,\ [\nu,\ \nu']} \left[\begin{array}{c|l} & (\epsilon_p) \\ \lambda_1 & \sigma+M, r, (\gamma_t); \sigma+N, \mu, (\gamma'_{t'}) \\ \lambda_2 & (\delta_s), \sigma+M+\mu, \sigma+N+r \\ & (\beta_\nu); (\beta'_{\nu'}) \end{array} \right]$$

उपर्युक्त प्रकार से बाईं ओर का मान ज्ञात करने पर हमें अभीष्ट प्रसार

$$\sum_{M,N=0}^{\infty} \frac{(c)_M(c')_N}{M!\,N!} G^{n,\ \nu_1+2,\ \nu_2+2,\ m_1,\ m_2}_{p,\ [t+2:\ t'+2],\ s+2,\ [\nu,\ \nu']} \left[\begin{matrix}\lambda_1\\ \\ \lambda_2\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}(\epsilon_p)\\ (\sigma+M,\ r,\ (\gamma_t);\ \sigma+N,\ \mu,\ (\gamma'_{t'})\\ (\delta_r),\ \sigma+M\mu,\ \sigma+N+r\\ (\beta_\nu):\ (\beta'_{\nu'})\end{matrix}\right]$$

$$=G^{n,\ \nu_1+2,\ \nu_2+2,\ m_1,\ m_2}_{p,\ [t+2:\ t'+2],\ s+2,\ [\nu,\ \nu']} \left[\begin{matrix}\lambda_1\\ \\ \lambda_2\end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}(\epsilon_p)\\ \sigma,\ r-c',\ (\gamma_t);\ \sigma,\ \mu-c,\ (\gamma'_{t'})\\ (\delta_s),\ \sigma+\mu-c,\ \sigma+r-c'\\ (\beta_\nu);\ (\beta'_{\nu'})\end{matrix}\right]$$

प्राप्त होता है। इस प्रसार को सम्बन्ध [1, p. 539] के प्रयोग द्वारा एक चर वाले माइजर के G-फलन से सम्बन्धित परिणाम में परिवर्तित किया जा सकता है:

$$G^{o,\ \nu_1,\ t,\ m_1,\ 1}_{o,\ t,\ n,\ q}\left[\begin{matrix}x\\ o\\ \end{matrix}\right.\left|\begin{matrix}\ldots\\ (\beta_t);\ (\gamma'_t)\\ \ldots\\ (\beta_q)\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{t}\Gamma(\gamma'_j)}{\prod_{j=2}^{q}\Gamma(1-\beta'_j)}\ G^{m_1,\ \nu_1}_{t,\ q}\left[x\left|\begin{matrix}(1-\gamma_t)\\ (\beta_q)\end{matrix}\right.\right];\ (q\geqslant t)$$

सम्प्रयुक्त गणित की समस्याओं में प्रयुक्त होने वाले अनेक विशिष्ट फलनों को G-फलन के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है (देखें [2, pp. 219-222] तथा [6, pp. 225-230])। इस प्रकार प्रसार (3·2) को ऊपर दी गई सारणी का व्यवहार करते हुये सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० बी० एम० अग्रवाल के प्रति आभार व्यक्त करता है जिन्होंने पथ-प्रदर्शन किया।

निर्देश

1· अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी साइं० इंडिया,** 1965, **31**, 536-46

2. चन्देल, आर० सी० एस० तथा अग्रवाल, आर० डी०, **ज्ञानाभा,** 1971, **1**, 83-91

3· वर्मा, ए०, Math. Comput., 1966, **20**, 413

4. सिंघल, आर० पी०, **इण्डियन जर्नं० प्योर एप्ला० मैथ०**, 1971, **2**, 610-14

5. बेटमैन प्रोजेक्ट, Higher Transcendental Functions, **भाग** I, **मैकग्राहिल बुक कम्पनी**, **न्यूयार्क**

6. ल्यूक, वाई० एल०, The Special Functions and their Approximations, **भाग I**, **न्यूयार्क-लन्दन**, **एकेडमिक प्रेस**, 1969

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 4, October 1975, Pages 353-357

डोलोमाइटीभवन में अविलेय अवशेषों की सार्थकता

राय अवधेश कुमार श्रीवास्तव तथा महाराज नारायण मेंहरोत्रा
भौमिकी विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जुलाई 15, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोध-पत्र में विभिन्न भूवैज्ञानिक तथ्यों की सहायता से सोन घाटी में विगोपित सेमरी तंत्र (विन्ध्य परासंघ) के फान चूनाश्मों की डोलोमाइटीभवन प्रक्रियाओं में अविलेय अवशेषों तथा मृत्तिका खनिजों की सार्थकता की विवेचना प्रस्तुत की गयी है। अंततः इस निष्कर्ष पर पहुँचा गया है कि फान चूनाश्मों की डोलोमाइटीभवन प्रक्रियाओं में अविलेय अवशेषों और मृत्तिका खनिजों की कोई सार्थक भूमिका नहीं रही है। तथापि इन शैलों में डोलोमाइटीभवन शैलीभवन प्रक्रियाओं की सहसामयिक है तथा मैग्नीशियम का संभावित स्रोत सागर जल ही रहा है।

Abstract

Significance of insoluble residue in dolomitization. *By* R. A. K. Srivastava and M. N. Mehrotra, Deparment of Geology, Banaras Hindu University, Varanasi.

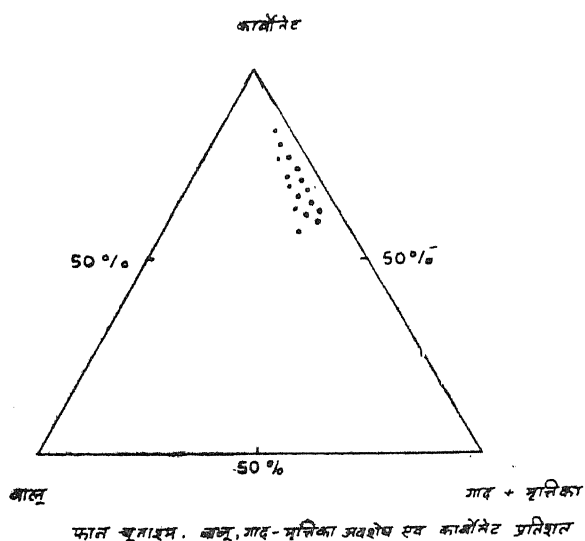
The present paper deals with the significance of insoluble residue and clay minerals in the process of dolomitization of Faun limestone, belonging to the Semri group (Vindhyan Supergroup), of Son valley region. With the help of various geological facts it has been concluded that insoluble residue and clay minerals have played no significant role in the dolomitization of Faun limestone. The dolomitization is contemporaeous with diagenesis and the possible source of Mg was the sea water itself.

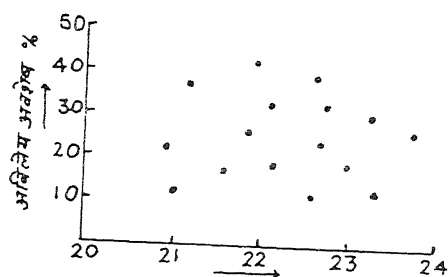
कार्बोनेट शैलों में अविलेय अवशेष के रूप में विद्यमान मृत्तिका खनिजों का डोलोमाइट खनिज की उत्पत्ति एवं डोलोमाइटीभवन प्रक्रियाओं पर पड़ने वाले प्रभावों पर पिछले दशकों में महत्वपूर्ण अनुसंधान हुये हैं। काहल[1] तथा जेन[2] के मतानुसार मृत्तिका खनिज कार्बोनेट अवसादों के डोलोमाइटी-भवन में मैग्नीशियम के संभावित स्रोत होते हैं। तथापि इन भूविदों को अविलेय अवशेष तथा

मैग्नीशियम की मात्राओं में सीधा सम्बन्ध प्राप्त हुआ है। परन्तु इन विचारों के विपरीत हेटफिल्ड तथा रोहरवाकर[3] डोलोमाइटीभवन में मृत्तिका खनिजों का कोई 'कारण या प्रभाव' नहीं मानते एवं अविलेय अवशेषों का निक्षेपण पर्यावरण में विशुद्ध यांत्रिक कारणों से कैल्सियमी अवसादों के साथ मिश्रित बतलाते हैं।

प्रस्तुत शोध-पत्र में इस प्रकरण के अध्ययन हेतु सोन घाटी में विगोपित विन्ध्य परासंघ के फान चूनाश्मों (श्रीवास्तव तथा महरोत्रा[4]) का चयन किया गया है। फान चूनाश्म जीवाश्म विहिन डोलोमाइक्रोस्पेराइट प्रकृति के शैल हैं जिनमें स्ट्रोमेटोलाइटी एवं शैवालीय संरचनाएं विशेष रूप से उल्लेखनीय हैं। रासायनिक विश्लेषण, विभेदक तापीय विश्लेषण, तापीय भारात्मक विश्लेषण, अवरक्त अध्ययन एंव एक्स-किरण विश्लेषणों द्वारा इस बात की पुष्टि हुई है कि ये शैल कैलसियम-मैग्नीशियम कार्बोनेट यथा $CaMg(CO_3)_2$ हैं (MgO 17·50 प्रतिशत) तथापि इन शैलों का प्रमुख कार्बोनेट डोलोमाइट है (मेहरोत्रा, श्रीवास्तव एवं सिन्हामहापात्र[(a) 5]) ।

फान चूनाश्मों में अविलेय अवशेषों की मात्रा 15 से 43 प्रतिशत के बीच पायी गयी है। जिन प्रतिदर्शों में सिलिका की मात्रा अधिक रही हैं उनमें अविलेय अवशेषों की मात्रा भी अधिक है। साधारणतः गाद एवं मृत्तिका की मात्रा (30·55 प्रतिशत) बालू (12·95 प्रतिशत) से अधिक है (चित्र 1)। बालू अंश का द्विनेत्री सूक्ष्मदर्शी से अध्ययन करने पर दूधिया रंग के कोणिक तथा उपकोणिक

फान चूनाश्म. बालू, गाद-मृत्तिका अवशेष एवं कार्बोनेट प्रतिशत

क्वार्ट्ज कणों की बहुलता मिलती है। कुछ क्वार्ट्ज कण लालिमा लिये हुये भी दृष्टिगोचर होते हैं। चर्ट, मस्कोवाइट, बायोटाइट, टूर्मेलीन, जरकान तथा हेमाटाइट एंव मैग्नेटाइट इत्यादि के कण भी प्राप्त हुये हैं। मृत्तिका अंश के एक्स-किरण विश्लेषण द्वारा इनमें क्वार्ट्ज (4·26, 2·282, 1·672, 1·381 Å) तथा इलाइट (3.882, 2·23, 1·298, 1·245 Å) की उपस्थिति ज्ञात होती है।

फान चूनाश्मों के प्रतिनिधि प्रतिदर्शों के MgO प्रतिशत तथा अविलेय अवशेषों की प्रतिशत मात्राओं के आपसी सम्बन्ध की जानकारी हेतु उन्हे चित्र 2 में आलेखित किया गया है। इस आलेख से स्पष्ट है कि इन दोनों ही प्राचलों में कोई सम्बन्ध नहीं है तथा ये प्राचल अनियमित रूप से बिखरे हुये हैं। यह सम्बन्ध इस बात की पुष्टि करता है कि फान चूनाश्म के मैग्नीशियम की मात्रा पर अविलेय अवशेषों का कोई सीधा तथा निर्णायक प्रभाव नहीं है। इस प्रकार के व्यवहार के लिये निक्षेपण की विभिन्न भौतिक-रासायनिक प्रक्रियायें तथा मातृस्रोत की प्रकृति उत्तरदायी हैं। अविलेय अवशेषों का अधिकांश मातृस्रोत द्वारा 'विशुद्ध यांत्रिक' प्रक्रियाओं द्वारा निक्षेपण स्थल में लाया गया हो सकता है।

फान चूनाश्म : अविलेय अवशेष तथा Mg सम्बन्ध

हेटफिल्ड एवं रोहरवाकर ने अपने महत्वपूर्ण शोध-पत्र में इस बात का उल्लेख किया है कि पैलियोजोइक शैलों में विद्यमान उच्च डोलोमाइट तथा उच्च अविलेय अवशेषों के सम्बन्ध भी इसकी पुष्टि करते हैं कि अविलेय अवशेषों की डोलोमाइट की उत्पत्ति में कोई सार्थक भूमिका नहीं है तथा डोलोमाइट प्रारंभिक या सहसामयिक उत्पत्ति के हो सकते हैं जो कि गुणात्मक तथा परिमाणात्मक दृष्टि से अपरदी पदार्थों से मुक्त हैं। साथ ही रीवरी[6] के मतानुसार सागरीय चूनाश्मों में मृत्तिका खनिज अपरदी उद्गम के होते हैं तथा इनके उद्गम की संभावनायें पश्च-शैलीभवन प्रक्रियाओं से सम्बन्धित हैं। चूनाश्मों में इलाइट जैसे मृत्तिका खनिज, जो कि फान चूनाश्मों में भी विद्यमान हैं, तत्रजात भी हो सकते हैं जिनका जन्म महाद्वीपीय उद्गम के अपक्षयीत खनिजों के रूपान्तरण स्वरूप होता है। कैल्सियमी पर्यावरण में इलाइट की नवीन रचना की भी पूरी संभावना रहती है (मिलोट[7])। अतः फान चूनाश्मों में मैग्नीशियम का स्रोत इलाइट नहीं हो सकता।

सीन तथा गिन्सवर्ग[8] नें भी ऐसे निक्षेपों का वर्णन प्रस्तुत किया है जिनमें डोलोमाइट कैल्सियम कार्बोनेट पंक के सहसामयिक प्रतिस्थापन स्वरूप जनित होता है। ऐसी परिस्थितियों में डोलोमाइट की उत्पत्ति के लिये मैग्नीशियम की प्रचुर मात्रा सागरीय जल की केशिका क्रिया द्वारा बराबर मिलती रहती है। सैन्डर तथा फ्रिडमैन[9] ने भी इसी प्रकार की क्रियाओं का वर्णन किया है। अतः यह कहा जा सकता है कि फान चूनाश्मों में डोलोमाइट की उत्पत्ति के लिये मैग्नीशियम की प्रचुर मात्रा सागर जलसे उपलब्ध हुई होगी।

वैसे तो आज भी डोलोमाइट का उद्भव एक विवादास्पद विषय है। साधारणतः डोलोमाइट खनिज सहजात, पश्चजात तथा शैलीभवन प्रक्रियाओं के कारण जनित होते हैं। सहजात प्रक्रियाओं से जनित डोलोमाइट के साथ वाष्पजन (एवोपोराइट) खनिज उपस्थित मिलते हैं। परन्तु सोन घाटी में अभिलक्षणी वाष्पजन खनिजों की अनुपस्थिति के आधार पर डोलोमाइट के सहजात उत्पत्ति की संभावनाएं नहीं के बराबर हैं। पश्चजात क्रियाओं द्वारा जनित डोलोमाइट सामान्यतः संरचनाओं द्वारा नियंत्रित होते हैं परन्तु फान चूनाश्म संरचनाओं द्वारा नियंत्रित नहीं हैं। अतः इन शैलों में डोलोमाइट पश्चजात उत्पत्ति के भी नहीं हो सकते। डोलोमाइट के आकार-प्रकार संयोजक पदार्थ की प्रकृति तथा कैल्साइट अन्तर्विष्टों के अभाव जैसे गठनीय अभिलक्षणों के आधार पर यह कहा जा सकता है कि फान चूनाश्मों में डोलोमाइटीभवन प्रक्रिया शैलीभवन प्रक्रियाओं के साथ-साथ प्रारंभ हो गई थी। अभिनव काल के कार्बोनेट अवसादों के अध्ययन (वार्थस्ट [10]) के आधार पर यह कहा जा सकता है कि प्रारंभिक काल में फान चूनाश्म मुलायम असंहनित कार्बोनेट पंक के रूप में रहे होंगे। इस कार्बोनेट पंक में अति सूक्ष्म साइज (1—4 माइक्रोन तक) एरागोनाइट खनिज की बहुलता रही होगी। शवाधान के परिणाम-स्वरूप कार्बोनेट पंक का अधिकांश जल धीरे-धीरे कम हुआ होगा तथा साथ ही इन शैलों में संहनन प्रक्रिया प्रारंभ हो गई होगी। कालान्तर में पर्यावरण की उचित परिस्थितियों में एरागोनाइट का विभिन्न क्रिस्टल सममिति तथा संघटन वाले डोलोमाइट में रूपान्तर हुआ होगा। परन्तु इस रूपान्तरण प्रक्रिया की व्याख्या कठिन है। कालान्तर में डोलोमाइट का पुनर्क्रिस्टलीभवन भी हुआ है जिसके परिणाम-स्वरूप अपेक्षाकृत बड़े साइज के कण निर्मित हुये हैं।

फान चूनाश्मों में विद्यमान शैवालीय आकृतियों यथा शैवालीय ऊओलाइट, शैवालीय परिपर्पटी, शैवालीय तंतु तथा स्ट्रोमेटोलाइटी संरचनाओं को शैवालीय उत्पत्ति (वुल्फ[11]) का माना गया है। अतः फान चूनाश्मों के शैलीभवन में शैवालों की भूमिका विचारणीय है। छिछले सागरीय जल में जनित चूनाश्मों में शैवाल सीमेन्टीकरण तथा अश्मीभवन जैसी प्रक्रियाओं में महत्वपूर्ण हैं। परन्तु क्या शैवाल मैग्नीशियम के भी स्रोत हो सकते हैं? इस समस्या की विवेचना अभी भी अपूर्ण है। सामान्यतः शैवाल सतह पर तथा आन्तर स्तर जल में रासायनिक परिवर्तन उत्पन्न करते हैं तथा साथ ही साथ अपरदी पदार्थों को आवृत कर लोट लेते हैं जिससे सीमेन्टीकरण प्रक्रियायें तेज हो जाती हैं। स्कीनर[12] ने कुछ सीमा तक डोलोमाइट की उत्पत्ति में शैवालों की भूमिका की विवेचना की है।

डोलोमाइटीभवन में अविलेय अवशेषों की सार्थकता की विवेचना के उपसंहारस्वरूप यह कहा जा सकता है कि फान चूनाश्मों की डोलोमाइटीभवन प्रक्रियाओं में मृत्तिका खनिज इलाइट तथा अन्य अविलेय पदार्थों की कोई भूमिका नहीं रही है तथा मैग्नीशीयम का प्रमुख स्रोत सागर जल ही रहा है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रो० सुरेन्द्र कुमार अग्रवाल, अध्यक्ष, भौतिकी विभाग, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, का आभारी है जिन्होंने विभागीय प्रयोगशालाओं में कार्य करने की समुचित सुविधा प्रदान की तथा हमारा उत्साहवर्धन किया।

निर्देश

1. काह्ल, सी० एफ०, **जर० सेडी० पेटरा**, 1965, **35**, 448-53
2. **जेन**, इ० एन०, **अमे० जर्न० साइन्स**, 19:9, **2570**, 29-43
3. हेटफिल्ड, सी० जी० तथा रोहरवाकर, जे० जे०, **जर० सेडी० पेटरा०**, 1966, **36**, 828-31
4. श्रीवास्तव, आर० ए० के० तथा मेहरोत्रा, एम० एन०, **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका** 1973, **16 (4)**, 235-51
5. मेहरोत्रा, एम० एन०, श्रीवास्तव, आर० ए० के० तथा सिन्हामहापात्र, पी० के०, **जर० थरमल एनालिसिस**, 1975, **7**, 5-6
6. रीवरी, ए०, **कांग्रेस जिआ० इन्टर० अलजियर**, 1953, **18**, 177-180
7. मिलोट, जी०, **थीसीस साइन्स किलरमोन्ट एट साइन्स ड ला टेरी**, 1949, **3-4**, 290
8. सीन, ई० ए० तथा गिन्सबर्ग, आर० एन०, **अमे० एसो० पेटरोला० जिआ० बुले०**, 1964, **48**, 547
9. सैन्डर्स, जे० ई० तथा फ्रिडमैन, जी० एम०, **कार्बोनेट राक्स, 9A एलजेवियर, एमस्टर्डम**, 1967
10. वाथर्स्ट, आर० जी० सी०, **कार्बोनेट सेडीमेन्ट्स एण्ड देयर डाइजेनेसिस, एलजेवियर, एमस्टर्डम** 1971
11. वुल्फ, के० एच०, **सेडिमेन्टालोजी**, 1965, **4**, 113-78
12. स्कीनर, एच० सी० डब्लू०, **अमे० जर्न० साइन्स**, 1963, **261**. 449-72

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No 4, October, 1975, Pages 359-366

n-चरों वाला सार्वीकृत फलन-II

एस० एस० खाडिया तथा ए० एन० गोयल
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—मई 10, 1973]

सारांश

प्रस्तुत शोध प्रपत्र में n-आंशिक अवकल समीकरणों का समुच्चय दिया गया है जिसकी तुष्टि n-चरों वाले माइजर G-फलन अर्थात् $G(x_n)$ द्वारा होती है। विभिन्न विचित्रताओं के लिये हलों की विवेचना की गई है। $G(x_n)$ तथा अन्य हलों के मध्य पाये जाने वाले सम्बन्ध भी दिये गये हैं।

Abstract

On the generalised function of 'n' variables (II) : *By* S. S. Khadiya and A. N Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

The present paper gives the set of 'n' partial differential equations satisfied by Meijer G-function of 'n' variables viz. $G(x_n)$. The solutions at various singularities namely $(0, 0, \ldots, 0 \;\; n \text{ times})$, $(0, 0, \ldots, 0 \;\; n-1 \text{ times}, \infty)$, $(0, \infty, \infty, \ldots, n-1 \text{ times})$, $(\infty, \infty, \ldots, n\text{-times})$ (the total number of singularities being $n\,!$) have been discussed. Relations between $G(x_n)$ and other solutions are also given.

1. भूमिका :

खाडिया तथा गोयल (1970) ने n-चरों वाला माइजर G-फलन अर्थात् $G(x_n)$ का सूत्रपात किया है। $G(x_n)$ को निम्नवत् कुछ भिन्न रूप में लिखने पर

$$G(x_n)=G_{p,\; q;\; (P_n,\, Q_n)}^{m,\; 0;\; (M_n, N_n)}\left[(x_n) \middle| \begin{matrix} [(a_p);\; (b_q)] \\ \left(\left(\overset{n}{c}_{P_n}\right)\right);\left(\left(\overset{n}{d}_{Q_n}\right)\right) \end{matrix} \right]=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_n}\phi(s_{kk})\psi(s_k)(ds_k) \quad (1\cdot0)$$

जहाँ पुनरावृत पादाक्षर 1 से n तक के योग को अर्थात् $\sum_{k=1}^{n} s_k = s_{kk}$. को प्रदर्शित करता है।

$$\phi(s_{kk})=\left[\prod_{j=1}^{m} \Gamma(a_j+s_{kk})\right]\left[\prod_{j=1}^{p} \Gamma(1-a_j-s_{kk}) \prod_{j=1}^{q} \Gamma(b_j+s_{kk}\right]^{-1} \quad (1\cdot1)$$

$$\psi(s_k)(ds_k)=\prod_{k=1}^{n}\left[x^k \,.\, ds_k \,.\prod_{j=1}^{Mk} \Gamma(c^k{}_j+s_k) \prod_{j=1}^{Nk}\Gamma(d^k{}_j-s_k)\right]\left[\prod_{j=1+Mk}^{pk} \Gamma(1-c^k{}_j-s_k)\right.$$

$$\left.\prod_{j=1+Nk}^{\phi k} \Gamma(1-d^k{}_j+sk)\right]^{-1} \quad (1\cdot2)$$

(b_q) से अनुक्रम $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_q$; $\left(\left(\overset{n}{c}_{pn}\right)\right)$ से अनुक्रम $\overset{1}{c}_1, \overset{1}{c}_2, \overset{1}{c}_3, \ldots, \overset{1}{c}_{p1}; \overset{2}{c}_1, \overset{2}{c}_2, \ldots, \overset{2}{c}_{p2}; \ldots, \overset{n}{c}_1, \overset{n}{c}_2, \ldots, \overset{n}{c}_{pn}$ प्रदर्शित किया गया है। (L_n) n उपयुक्त कंटूर हैं तथा धन पूर्णांक $p; p_1, P_2, \ldots, P_n; q; Q_1, Q_2, \ldots, Q_n; m; M_1, M_2, \ldots, M_n; N_1, N_2, \ldots, N_n$ निम्नांकित असमिकाओं को तुष्ट करते हैं

$$p\geqslant0;\ q\geqslant0;\ (Q_k)\geqslant1;\ 0\leqslant(M_k)\leqslant(P_k);\ p+(P_k)\leqslant q+(Q_k); k=1, 2, \ldots, n. \quad (1\cdot3)$$

तथा $0\leqslant(M_k)\leqslant(P_k)$ से तात्पर्य असमिकायें $0\leqslant M_1\leqslant P_1; 0\leqslant M_2\leqslant P_2; \ldots, 0\leqslant M_k\leqslant P_k$ हैं। $(x_k)=0$ मानों को बहिष्कृत किया गया है।

रिक्त गुणनफल को 1 के रूप में निगमित किया जाता है। कंटूर L_k S_k तल में रहता है और लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण है जिससे आश्वस्त हुआ जा सकता है कि $\Gamma(1-c^k{}_j+s_k), j=1, 2, \ldots, M_k$; तथा $\Gamma(a_j+s_{kk}), j=1, 2, \ldots, m$ के पोल कंटूर L_k के बाईं ओर पड़ें तथा $\Gamma((d^k{}_j-s_k), j=1, 2, \ldots, N_k$ के पोल दाईं ओर पड़ें जहाँ इसके बाद से $k=1, 2, \ldots, n$

फलन $G(x_n)$ निम्नांकित प्रतिबन्ध-समुच्चय के अन्तर्गत (x_n) का वैश्लेषिक फलन है

$$|\arg x_k|<(m+M_k+N_k-\tfrac{1}{2}P_k-\tfrac{1}{2}Q_k-\tfrac{1}{2}p-\tfrac{1}{2}q)\pi$$

$$2(m+M_k+N_k)>p+q+P_k+Q_k;\ k=1, 2, \ldots, n \quad (1\cdot4)$$

2. बवकल समीकरण

यदि $\theta_k=x_k\frac{\partial}{\partial x_k}$ तो $G(x_n)=w$ (मान लें) के द्वारा तुष्ट होने वाले n आंशिक अवकल समीकरणों के समुच्चय को निम्न प्रकार से लिखेंगे

$$\left[(-1)^{p+P_k-m-M_k-N_k} \,.\, x_k \,.\prod_{j=1}^{p} (\theta_{kk}+a_j-1) \prod_{j=1}^{pk} (\theta_k-c^k{}_j+1)\right.$$

$$-\prod_{i=1}^{q} (b_j+\theta_{kk}-1) \prod_{j=1}^{Qk} (\theta_k-d^k{}_j)w=0 \quad (B)$$

(B) को प्राप्त करने के लिये $\prod_{j=1}^{p} (\theta_{kk}+a_j-1) \prod_{j=1}^{pk}(\theta_k-c^k{}_j+1)$ तथा

$$\prod_{j=1}^{q}(\theta_{kk}+b_j-1) \quad \prod_{j=1}^{Qk}(\theta_k-d^k{}_j)$$

को $G(x_n)$ पर संक्रिया करते हैं, $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi$ cosec (πz) का व्यवहार करके सरल करने पर (B) प्राप्त करते हैं।

3. (B) से हमें पता चलता है कि (0, 0, ... nबार) (0, 0. ..., $n-1$ बार, ∞), ..., (0, 00, ∞, ..., $n-1$ बार तथा (∞, ∞, ..., n-बार) ही एकमात्र विचित्रतायें हैं और इनकी कुल संख्या $p+P_k$ $>$ या $<q+Q_k$ प्रतिबन्धों के अन्तर्गत $n!$ है। किन्तु यदि $p+P_k=q+Q_k$, तो बिन्दु $(-1)^{-p+P_k-M-M_k-N_k}$ समीकरण (B) का एकमात्र बिन्दु होगा। हम इस एकमात्र बिन्दु के प्रतिवेश (पड़ोस में) हलों का मौलिक समुच्चय खोज पाने में असमर्थ रहे हैं। समीकरण (B) में (00, 00, ..., n-बार पर हल प्राप्त करने के लिये x_k को $(x_k)^{-1}$ द्वारा; (0, 0, ..., $n-1$ बार ∞) के लिये x_{k-1} को x_{k-1} द्वारा तथा अंतिम अर्थात् x_n को $(1/x_n)$ द्वारा (∞, ∞, ..., $n-1$ बार, 0) के लिये (x_{k-1}) को $(x_{k-1})^{-1}$ द्वारा और अन्तिम अर्थात् x_n को x_n द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं।

4. (0, 0, ..., n-**बार**) **पर हल**

माना कि
$$w=\prod_{k=1}^{n} x_k^{h_k} \sum_{(g_n)=0}^{\infty} A(g_n) \prod_{k=1}^{n} \left(x^{g}_{kk}\right) \tag{4·1}$$

जहाँ $h_1, h_2, ..., h_n$ n-उपयुक्त स्थिरांक हैं। (4·1) में से समीकरण (B) में w का मान रखने पर

$$(-1)^{p+P_k-m-M_k-N_k} \cdot \sum_{(g_n)=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{p} \{(g_{kk}+h_{kk})+a_j-1\} \prod_{j=1}^{pk} (g_k+h_k-c^k{}_j+1) \cdot A(g_n).$$

$$\prod_{\substack{\delta=1\\ \delta\neq k}}^{n} (x_\delta^{h_\delta+g_\delta}) \cdot x_k^{h_k+g_k+1} - \sum_{(g_n)=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{q} \{(h_{kk}+g_{kk})+b_j-1\}$$

$$\prod_{j=1}^{Qk} (h_k+g_k-d^k{}_j)\ A(g_n) \prod_{\delta=1}^{n} \left(x_\delta^{h_\delta+g_\delta}\right)=0 \tag{4·2}$$

निकाय के 'n' घातांकी समीकरण

$$\prod_{j=1}^{q} (h_{kk}+b_j-1) \prod_{j=1}^{Qk} (h_k-d^k{}_j)=0 \text{ हैं।} \tag{4·3}$$

समीकरण (4·3) से $h_1, h_2, h_3, ..., h_n$ प्राचलों के सम्भावित मान-समुच्चय निम्नवत् प्राप्त होते हैं:

$$\left.\begin{array}{l} h_k=d^k{}_{j_k} \text{ यदि } k,=1\ 2, ..., n;\ j_k=1, 2, ..., Q_k \\ h_k=\theta \text{ यदि } k=1, 2, ..., (n\ .\ 1);\ h_n=1-b_j \text{ यदि } j=1, 2, ..., q \\ h_1=1-b_j \text{ यदि } j=1, 2, ..., q;\ h_{,2\ k}=0 \end{array}\right\} \tag{4·4}$$

(4·2) से हमें निम्न समीकरण प्राप्त होगा:

$$\frac{A_{g_1, g_2, g_3, g_4, \cdots, g_{k-1}, g_{k+1}, g_{k+1}, \cdots, g_n}}{A_{g_1, g_2, \cdots, g_n}}$$

$$=\left[\prod_{j=1}^{p}(h_{kk}+g_{kk}+a_j-1)\prod_{j=1}^{Pk}(h_k+g_k-c^k{}_j+1)\right]\left[\prod_{j=1}^{q}(h_{kk}+g_{kk}+b_j)\right.$$

$$\left.\prod_{j=1}^{Qk}(h_k+g_k-d^k{}_j+1)\right]^{-1}.\,(-1)^{p+P_k-m-M_k-N_k} \qquad (4\cdot5)$$

(4·5) से हमें

$$A_{(gn)}=\frac{\prod_{j=1}^{p}(h_{kk}+a_j-1)_{gkk}\prod_{k=1}^{n}\left\{\prod_{j=1}^{Pk}(h_k-c^k{}_j+1)_{gk}\right\}}{\prod_{j=1}^{q}(h_{kk}+b_j)_{gkk}\prod_{k=1}^{n}\left\{\prod_{j=1}^{Qk}(h_k-d^k{}_j+1)_{gk}\right\}}\prod_{k=1}^{n}\left[\{(-1)^{p+P_k-m-M_k-N_k}\}^{gk}\right].\,C \quad (4\cdot6)$$

प्राप्त होगा जहाँ C ऐसा स्थिरांक है जो (g_n) से मुक्त है । अब (4·1) तथा (4·6) से समीकरण (B) के निम्नांकित सामान्य हल प्राप्त होंगे जो बिन्दु (0, 0, ..., n बार) के निकट वैध हैं ।

$$W=B_1\prod_{k=1}^{n}x_k^{d^k_{h_k}}H_1{}^*+\sum_{i=2}^{n+1}B_1\,x_{i-1}^{1-b_g}\,H_i^* \qquad (4\cdot7)$$

जहाँ $h_k=1, 2, \ldots, Q_k$; $k=1, 2, \ldots, n$; $g=1, 2, \ldots, q$ तथा $H_i{}^*$ द्वारा $A(g_n)$ के मान सूचित होते हैं जो (4·4) में दिखाये गये h_n के संगत मान (4·4) हैं । (4·7) में समस्त $H_i{}^*$ रैखिकत: स्वतन्त्र हैं जिसके फलस्वरूप एकाकी बिन्दु (0, 0, ..., n-बार) के आसपास हलों का मौलिक निकाय वैध है ।

5. (∞, ∞, ..., n-बार) पर हल

हम कल्पना करेंगे कि $p+P_k>q+Q_k$ यदि $k=1, 2, \ldots, n$ तथा अवकल समीकरणों B में x_k के स्थान पर $(x_k)^{-1}$ $k=1, 2, \ldots, n$ रखेंगे और अनुभाग 4 की विधि से हल करने पर हमें निम्नांकित हल प्राप्त होते हैं:

$$W=B'\prod_{k=1}^{n}\left(x_k^{c^k_{hk}-1}\right)F\left[\begin{array}{l|l|}q & (n+1)-\Sigma\, c^k_{hk}-(b_q)\\ (Q_n) & \left\{1-c^n_{h_n}+\left(d^n_{Q_n}\right)\right\}\\ p & (n+2)-\Sigma\, c^k_{hk}-(a_p)\\ (P_n)-1 & \left\{1-c^n_{h_n}+c^n_{P_n}\right\}\end{array}\ \frac{(-1)^{q+Q_n-m-M_n-N_n+2\lambda n}}{x_n}\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{n+1}B^i\,.\,x_{i-1}^{1-a_{t_{i-1}}}\,.\,F\left[\begin{array}{l|l|}q & a_{t_n}-(b_q)\\ (Q_n)+1 & \left\{\left(d_{Q_n}\right)+a_{t_{i-1},1}\right\}\\ p & 1+a_{t_{i-1}}-(a_p)\\ (P_n) & \left(c^n_{P_n}\right)\end{array}\right]$$

जहाँ (λ_n) धन पूर्णांक हैं, $h_k=1, 2, ..., P_k (k=1, 2, ..., n)$ तथा $(t_n)=1, 2, ..., p$.

6. (0, 0, ..., 0 $n-1$ **बार**, ∞) **पर हल**

माना कि $p+P_k<q+Q_k\ (k=1, 2, ..., n-1)$ तथा $p+P_n>q+Q_n$ समीकरण में x_n को x_n^{-1} के द्वारा प्रतिस्थापित करने तथा उपर्युक्त विधि से हल करने पर हमें

$$w=E_1 \prod_{k=1}^{n}\left(x_k^{d^k_{h_k}}\right) . H_1\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, \frac{1}{x_n}\right)+E_2\prod_{k=1}^{n-1}\left(x_k^{d^k_{h_k}}\right)x_n^{1-a_h-\sum_{k=1}^{n-1} d^k_{h_k}}.$$

$$H_2\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, \frac{1}{x_n}\right)+...+E_n . x_1^{2-b_\alpha-\sum_{k=2}^{n-1} d^k_{h_k}-c^n_{h_n}}$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left\{x_k^{c^k_{h_k}-1}\right\} H_n\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, \frac{1}{x_n}\right)$$

प्राप्त होगा जहाँ $H_1\left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, \frac{1}{x_n}\right)$

$$=\sum_{(g_n)=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\left\{\sum_{j=1}^{p} d^k_{h_k}+c^n_{h_n}+a_j-1\right\}\sum_{k=1}^{n-1} g_k-g_n}{\prod_{j=1}^{q}\left\{\sum_{k=1}^{n-1} d^k_{h_k}+c^n_{h_n}+b_j\right\}\sum_{k=1}^{n-1} g_k-g_n}$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{\prod_{j=1}^{P_k}\left(d^k_{h_k}-c^k_j+1\right)_{g_k}}{\prod_{j=1}^{Q_k}\left(d^k_{h_k}-d^k_j+1\right)_{g_n}}\right\}\frac{\prod_{j=1}^{Q_k}\left(d^n_j-c^n_{h_n}\right)_{g_n}}{\prod_{j=1}^{P_n}\left(c^n_j-c^n_{h_n}\right)_{g_n}}\prod_{k=1}^{n-1}[(-1)^{p+P_k-m-M_k-N_k}\, x_k]^{g_k}$$

$$\cdot\left[\frac{(-1)^{p-m+Q_n-M_n-N_n+2\lambda}}{x_n}\right]^{g_n}$$

$H_2\left(x_1, x_2,..., x_{n-1}, \frac{1}{x_n}\right)$

$$=\sum_{(g_n)=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{p}(a_j-a_h)\sum_{k=0}^{n-1} g_k-g_n}{\prod_{i=1}^{q}(1-a_h+b_j)\sum_{k=1}^{n-1} g_k-g_n}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{Q_n}\left(d^n_j+a_h+\sum_{k=1}^{n-1} d^k_{h_k}-1\right)_{g_n}}{\prod_{j=1}^{P_n}\left(c^n_j+\sum_{k=1}^{n-1} d^k_{h_k}+a_h-1\right)_{g_n}}$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{\prod_{j=1}^{P_k}(d^k_{h_k}-c^k_j+1)}{\prod_{j=1}^{Q_k}(d^k_{h_k}-d^k_j+1)}\right\}\prod_{k=1}^{n-1}\{(-1)^{p+P_k-m-M_k-N_k}x_k\}^{g_k}$$

$$\{(-1)^{p-m+Q_n-M_n-N_n+2\lambda}\, x_n\}^{g_n}$$

तथा $H_3, H_4 \ldots,$ और H_n के लिये भी ऐसे ही सम्बन्ध होंगे जहाँ $h_k=1, 2, \ldots, Q_k$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$; $h=1, 2, \ldots, p$; $k=1, 2, \ldots, q$; $h_n=1, 2, \ldots, P_n$; λ तथा (λ_{n-1}) सभी धन पूर्णांक हैं।

7. $(\infty, \infty, \ldots, n-1$ **बार**, $0)$ **पर हल**

माना कि $p+P_k>q+Q_k$ $(k=1, 2, \ldots, n_{-1})$ तथा $p+P_n<q+Q_n$. (x_k) को समीकरण (B) में $(x_k)^{-1}(k=1, 2, \ldots, n-1)$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर तथा उपर्युक्त विधि से हल करने पर हमें

$$W=M_1\prod_{k=1}^{n-1}\left(x_k^{c_{hk}^k-1}\right)x_n^{d_{hn}^n}H_1\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_{n-1}},x_n\right)+M_2\prod_{k=1}^{n-1}\left(x_k^{c_{hk}^k-1}\right)$$

$$x_n^{n-b_k-\prod_{k=1}^{n-1}C_{hk}^k}\cdot H_2\left(\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_{n-1}},x_n\right)+\ldots+M_n\,x_1^{n-1-d_{hk}^n-\sum_{k=2}^{n-1}c_{h_k}^k-a_h}$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(x_k^{c_{hk}^k-1}\right)x_n^{d_{hn}^n}H_n\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_{n-1}},x_n\right)$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$H_1\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_{n-1}},x_n\right)$$

$$=\sum_{(g_n)=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n-1}c_{hk}^k-n+d_{hn}^n+a_j\right)_{g_n-\sum_{k=1}^{n-1}g_k}}{\prod_{j=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{n-1}c_{hk}^k+a_{h_k}^n-(n-1)+b_j\right)_{g_n-\sum_{k=1}^{n-1}}}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{Pn}\left(d_{hn}^n-c_j^n+1\right)_{g_n}}{\prod_{j=1}^{Qn}\left(d_{hn}^n-d_j^n+1\right)_{g_n}}$$

$$\{(-1)^{p-m+Pn-Mn-Qn}\,x_n\}^{gn}\prod_{k=1}^{n-1}\left[\left\{\frac{\prod_{j=1}^{Qk}\left(1-c_{hk}^k+d_j^k\right)_{g_n}}{\prod_{j=1}^{Pk}\left(1-c_{hk}^k+c_j^k\right)_{g_k}}\right\}\left\{(-1)^{p-m-Qk-Mk-Nk-2\lambda_k}\frac{1}{x_k}\right\}^{g_k}\right]$$

$$H_2\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_{n-1}},x_n\right)$$

$$=\sum_{(g_n)=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}(a_j-a_h)_{g_n-\sum_{k=1}^{n-1}g_k}}{\prod_{j=1}^{q}(1-b_k+b_j)_{g_n-\sum_{k=1}^{n-1}g_k}}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{Pn}\left(n-b_k-\sum_{k-1}^{n-1}c_{hk}^k-c_j^n+1\right)_{g_n}}{\prod_{j=1}^{Qn}\left(n-b_k-\sum_{k=1}^{n-1}c_{hk}^k-d_{nn}^n-1\right)_{g_n}}$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left[\frac{\prod_{j=1}^{Q_k}\left(d_j^k-c_{h_k}^k+1\right)_{g_k}}{\prod_{j=1}^{P_k}\left(c_j^k-c_{h_k}^k+1\right)_{g_k}}\left\{(-1)^{p-m+Q_k-M_k-N_k-2\lambda_k}\frac{1}{x_k}\right\}^{g_n}\right]\{(-1)^{p-m-P_n-M_n-Q_n}x_n\}g_n$$

तथा $H_3, H_4, \ldots$ और H_n के लिये भी ऐसे ही परिणाम होंगे जहाँ $h=1, 2, \ldots, P$; $h=1, 2, \ldots, p$; $t=1, 2, \ldots, q$; $h_n=1, 2, \ldots, Q_n$ तथा λ और (λ_{n-1}) सभी घन पूर्णांक हैं तथा सभी स्थिरांक हैं ।

8. अन्य हल

यह ध्यान देना रुचिकर होगा कि निम्नांकित फलनों द्वारा भी समीकरण (B) की तुष्टि होती है,

$$\text{(i)}\quad G_{p,\,q;\,(P_n),\,(Q_n)}^{m,\,0;\,(0),\,(Q_n)}\left[x_n(-1)^{Q_n-M_n-N_n-2\psi_n}\middle|\begin{matrix}[(a_p):(b_q)]\\ \left(\left(c_{P_n}^n\right)\right);\left(\left(d_{Q_n}^n\right)\right)\end{matrix}\right]$$

जहाँ $\psi_1=\lambda_1.\lambda_1+1, \ldots, \lambda_1+Q_1+P_1; \ldots; \psi_n=\lambda_n, \lambda_n+1, \ldots, \lambda_n+Q_n-P_n$; तथा (λ_n) पूर्णांक हैं ।

$$\text{(ii)}\quad G_{p,\,q;\,(P_n),\,(Q_n)}^{m,\,0;\,P_1,\,0,\,0,\,Q_2;\,\ldots;\,0,\,(Q_n)}\left[\begin{matrix}x_1(-1)^{P_1-M_1-N_1}\\ \{x_k(-1)^{Q_k-M_k-N_k-2\psi_k}\}_{2,\,n}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[(a_p);(b_q)]\\ \left(\left(c_{P_n}^n\right)\right);\left(\left(d_{Q_n}^n\right)\right)\end{matrix}\right]$$

जहाँ $\{\ \}_{2,\,n}$ द्वारा k का बोध होता है जो 2 से n तक विस्तीर्ण है $\psi_k=\lambda_k,\lambda_k+1, \ldots, \lambda_k+Q_k-P_k$ तथा $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ सभी पूर्णांक हैं ।

$$\text{(iii)}\quad G_{p,\,q;\,(P_n),\,(Q_n)}^{m,\,0;\,0,\,Q_1;\,P_2,\,0;\,\ldots;\,P_n,\,0}\left[\begin{matrix}x_1(-1)^{Q_1-M_1-N_1-2\psi_1}\\ \{x_k(-1)^{P_k-M_k-N_k}\}_{2,\,n}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[(a_p);(b_q)]\\ \left(c_{P_n}^n\right);\left(\left(d_{Q_n}^n\right)\right)\end{matrix}\right]$$

जहाँ $\psi_1=\lambda_1, \lambda_1+1, \ldots, \lambda_1+Q_1-P_1$; λ_1 पूर्णांक हैं ।

$$\text{(iv)}\quad G_{p,\,q;\,(P_n),\,(Q_n)}^{p,\,0;\,0,\,Q_1;\,P_2,\,0;\,\ldots;\,P_n,\,0}\left[\begin{matrix}x_1(-1)^{p-m-Q_1-M_1-N_1-2\psi_1}\\ \{x_k(-1)^{p-m+P_k-M_k-N_k}\}_{2,\,n}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[(a_p);(b_q)]\\ \left(\left(c_{P_n}^u\right)\right);\left(\left(d_{Q_n}^n\right)\right)\end{matrix}\right]$$

जहाँ $\psi_1=\lambda_1, \lambda_1+1, \ldots, \lambda_1+Q_1-P_1$; λ_1 पूर्णांक है ।

$$\text{(v)}\quad G_{p,\,q,\,;\,(P_n),\,(Q_n)}^{p,\,0;\,P_1,\,0;\,0,\,Q_2;\,\ldots;\,0,\,Q_n}\left[\begin{matrix}x_1(-1)^{p-m+P_1-M_1-N_1}\\ \{x_k(-1)^{p-m+Q_k-M_k-N_k-2\psi_k}\}_{2,\,n}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}[(a_p);(b_q)]\\ \left(\left(c_{P_n}^n\right)\right);\left(\left(d_{Q_n}^n\right)\right)\end{matrix}\right]$$

जहाँ $\psi_k=\lambda_k, \lambda_k+1, \ldots, \lambda_k+Q_k-P_k$; λ_k पूर्णांक हैं ।

$$\text{(vi)}\quad G^{p,\,0;\,(0),\,(Q_n)}_{p,\,q;\,(P_n),(Q_n)}\left|\ \{x_k(-1)^{p-m+Q_k-M_k-N_k-2\psi_k}\}_{1,\,n}\ \middle|\begin{matrix}[(a_p);\,(b_q)]\\ \left(\left(c^{n}_{P_n}\right)\right);\left(\left(d^{n}_{Q_n}\right)\right)\end{matrix}\right]$$

जहाँ $\psi_k=\lambda_k, \lambda_k+1, \ldots, \lambda_k+Q_k-P_k$; λ_k पूर्णांक हैं ।

निर्देश

1. खाडिया, एस० एस० तथा गोयल, ए० एन०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका,** 1970, **13,** 191-201.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 4, October, 1975, Pages 367-370

कतिपय कार्बनिक द्रवों का ग्रुनाइज़ेन प्राचल

जे० डी० पाण्डे तथा आर० एल० मिश्र
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—सितम्बर 26, 1975]

सारांश

कतिपय कार्बनिक द्रवों के स्यूडो-ग्रुनाइज़ेन प्राचल[1] की ताप-निर्भरता पर प्रकाश डाला गया है। अध्ययनगत समस्त कार्बनिक द्रवों के लिये स्यूडो-ग्रुनाइज़ेन प्राचल, Γ का मान ताप के साथ रैखिक रूप से घटता है।

Abstract

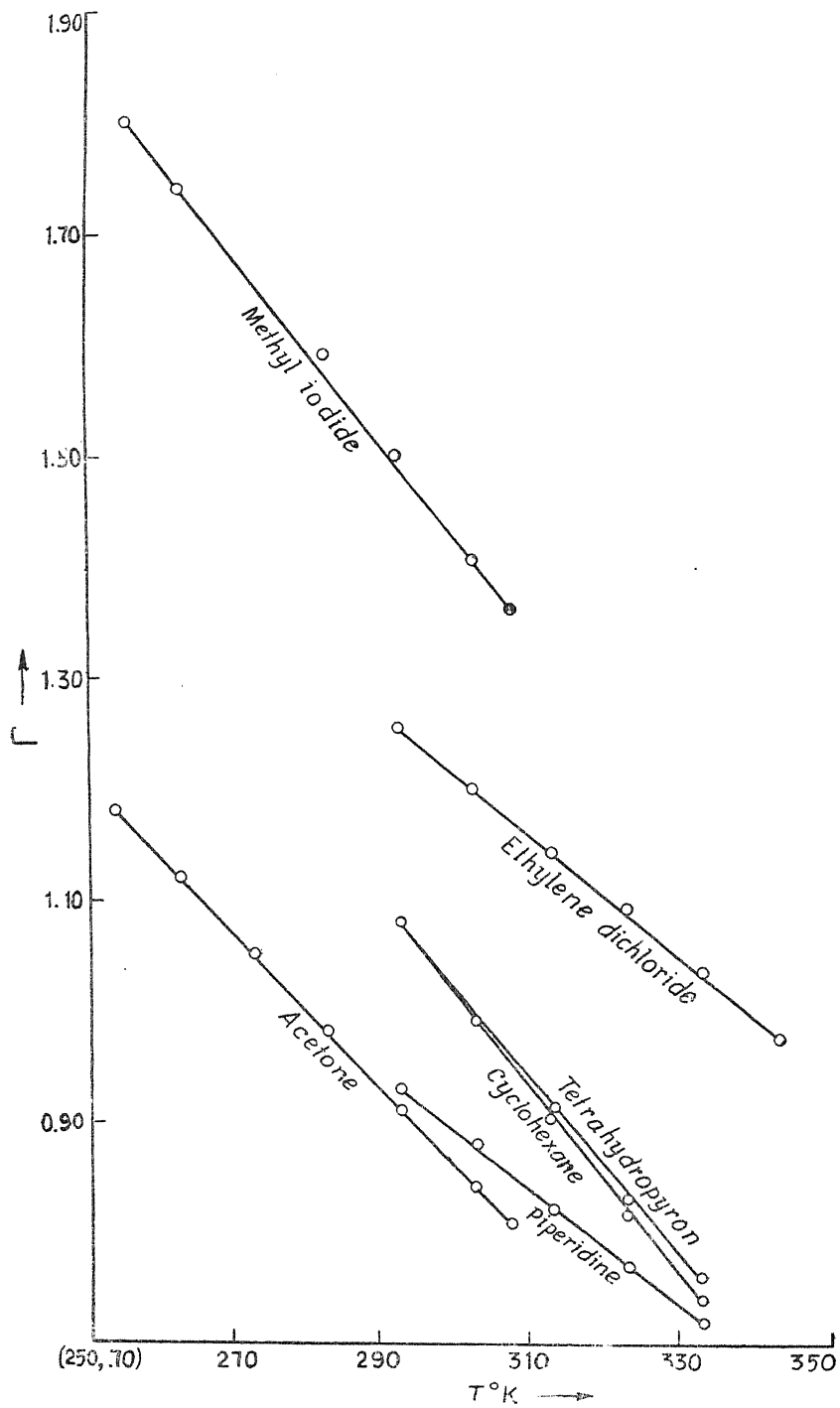
Gruneisen Parameter of some organic liquids. *By* J. D. Pandey and R. L. Mishra Department of Chemistry, University of Allahabad.

The temperature derpendence of Pseudo-Gruneisen parameter Γ of some organic liquids has been discussed. For all the liquids studied, Γ decreases linearly with increase in temperature.

1. विषय प्रवेश

वॉङ्ग और शूले[2] एवं वैचेल्डर[3] आदि शोधकर्त्ताओं ने ठोस पदार्थों के लिये ग्रुनाइज़ेन-प्राचल का विस्तृत अध्ययन किया है। नॉफ और शापिरो[4], कार और टण्डन[4-6], जैन और पाण्डे[7] तथा टण्डन एवं पाण्डे[8] स्यूडो-ग्रुनाइज़ेन-प्राचल की अभिधारणा को द्रवों में प्रयुक्त करने में पूर्ण समर्थ रहे। प्रस्तुत शोध पत्र में कर्णातीत ध्वनि वेग एवं संपीड्यता के आँकड़ों का प्रयोग करके कतिपय कार्बनिक द्रवों के लिये स्यूडो-ग्रुनाइज़ेन प्राचल पर प्रकाश डाला गया है।

ठोस पदार्थों के लिये जालक गतिकी के सिद्धान्त का प्रयोग करके ग्रुनाइज़ेन ने एक विमाविहीन प्राचल Γ की निम्न प्रकार परिभाषा दी—

$$\Gamma = \frac{\beta_s \cdot \alpha \cdot v}{C_p} \tag{1}$$

(चित्र 1)

Γ तथा T के मध्य सम्बन्ध

जहाँ β_s प्रत्यास्थता का समऊष्मीय आयतन गुणांक, α आयतन प्रसार गुणांक, V मोलर आयतन और C_p स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा है। ठोस क्रिस्टल जालकों[2-4] के ऊष्मीय एवं अन्य गुणों के अध्ययन में यह प्राचल अत्यधिक सहायक है। ऐसा देखा गया है कि बहुत से ठोसों के लिये ताप में परिवर्तन के साथ Γ के मान में परिवर्तन नहीं होता है।

प्रस्तुत शोध पत्र में लेखकद्वय ने प्राप्य कर्णातीत ध्वनि वेग एवं संपीड्यता के आँकड़ों का प्रयोग करके कतिपय कार्बनिक द्रवों के लिये स्यूडो-ग्रुनाइज़ेन प्राचल Γ का मान ज्ञात किया है जिसे निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है—

$$\Gamma = \frac{c^2\,\alpha}{C_p} \tag{2}$$

जहाँ c ध्वनि का वेग है।

निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग करने पर

$$c^2 = \frac{1}{\beta_s \cdot \rho} \tag{3}$$

और

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\beta_T}{\beta_S} \tag{4}$$

हमें ग्रुनाइज़ेन प्राचल के लिये निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है—

$$\Gamma = \frac{\alpha \cdot v}{\beta_T \cdot C_v} = \frac{\gamma - 1}{\alpha \cdot T} \tag{5}$$

जहाँ β_S, γ, β_T, T एवं v क्रमश: समऊष्मीय संपीड्यता, विशिष्ट ऊष्मा निष्पत्ति, समतापीय संपीड्यता, परम ताप एवं मोलर आयतन हैं।

परिणाम एवं विवेचना

प्रस्तुत शोधपत्र में मोलवेन ह्युजेज़[9-10] के कर्णातीत ध्वनिवेग एवं संपीड्यता के आँकड़ों का प्रयोग करके पिपरीडीन, टेट्राहाइड्रोपायरान, साइक्लोहेक्सेन, मेथिल आयोडाइड एवं ऐसीटोन के लिये स्यूडो-गुनाइज़ेन प्राचल के मान का परिकलन किया गया है। पैरा-ज़ाइलीन एवं पैरा-डाइआक्सेन के लिये सुब्रामण्यम्[11] तथा एथिलीन डाइक्लोराइड के लिये स्टेवेली[12] के आँकड़ों का प्रयोग करके Γ का मान निकाला गया है।

स्यूडो-ग्रुनाइज़ेन प्राचल को y-अक्ष पर एवं परम ताप T को x-अक्ष पर लेकर रेखाचित्र खींचा गया है (चित्र 1)। विभिन्न तापों पर आवश्यक आँकड़ों के अभाव में पैरा-ज़ाइलीन एवं पैरा-डाइ-आक्सेन के लिये (Γ, T) रेखांकन नहीं किया गया है। 25°C एवं 40°C पर पैरा-ज़ाइलीन के लिये Γ

के मान क्रमशः 1·04 तथा 0·94 हैं जबकि पैरा-डाइआक्सेन के लिये 1·26 तथा 1·12 । जैसा कि रेखचित्र से स्पष्ट है, Γ का मान ताप में बृद्धि के साथ घटता है । अतः स्पष्ट है कि ताप में बृद्धि के साथ-साथ इन द्रवों में पुनर्संरचना प्रारम्भ हो जाती है । जब ताप में 100°K की बृद्धि की जाती है तो किसी भी द्रव के Γ मान में 4% से अधिक की बृद्धि नहीं होती है । चूंकि उच्च ताप पर ध्वनिवेग का ताप गुणांक स्थिर नहीं रहता, विभिन्न ताप परास में (Γ, T) रेखाचित्र का ढाल भिन्न-भिन्न हो सकता है । टेट्राहाइड्रोपायरान एवं साइक्लोहेक्सेन के लिये 20°C एवं 30°C पर Γ का मान समान है किन्तु ताप में बृद्धि के साथ साइक्लोहेक्सेन के लिये Γ का मान टेड्राहाइड्रोपायरान की अपेक्षा कम हो जाता है ।

प्रस्तुत शोधपत्र में अध्ययन किये गये समस्त द्रवों में ग्रुनाइज़ेन प्राचल, Γ, का मान मेथिल आयोडाइड के लिये उच्चतम एवं ऐसीटोन के लिये निम्नतम है ।

निर्देश

1. ग्रुनाइज़ेन, ई०, **हैन्डबख डर फिजिक**, 1926, **10**, 21.
2. वॉङ्ग, सी० तथा शूले, डी० ई०, **जर्नल फिजिकल केमिस्ट्री ठोस**, 1967, **28**, 1225.
3. बैचेल्डर, डी० एन०, **जर्नल फिजिकल केमिस्ट्री**, 1564, **41**, 2327.
4. नॉफ, एल० तथा शापिरो, जे० एन०, **फिजिक्स रिव्यू**, 1970, **B 1**, 3893.
5. कार, एस० के० टण्डन, यू० एस० तथा सिंह, बी० के०, **फिजिक्स लेटर्स**, 1972, **38A**, 187.
6. कार, एस० के० तथा टण्डन, यू० एस०, **सालिड स्टेट कमुनिकेशन**, 1972, **11**, 963.
7. जैन, आर० पी० तथा पाण्डे, जे० डी०, **इन्डियन जर्नल प्योर एण्ड अप्लाइड फ़िजिक्स**, 1974, **12**, 830.
8. टण्डन यू० एस० तथा पाण्डे, एस० के०, **फिजिक्स लेटर्स**, 1972, **41A**, 161.
9. मोएलविन तथा ह्यूजेज, **प्रोसी० रायल सोसा० लंदन**, 1964, 278A, 574.
10. लो, डी० आई० आर० तथा मोएलविन, ई० ए०, **प्रोसी० रायल सोसा० लंदन**, 1962, **267A**, 384.
11. हैदर खान, बी० और सुब्रामण्यम, एस० वी०, **ट्रान्जैक्सन्स फैराडे सोसा०**, 1971, **67**, 2282.
12. स्टेवेली, एल० ए० के०, टुपमैन, डब्ल्यू० आई० तथा हार्ट, के० आर०, **ट्रान्जैक्सन्स फ़ैराडे सोसा०**, 1955, **51**, 323.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 4, October, 1975, Pages, 371-379

दो वृत्तों से परिवद्ध वाहिका में से होकर ताप वितरण

आर० सी० त्रिपाठी, एस० बी० श्रीवास्तव तथा एस० एन०सिंह
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—अक्टूबर, 8, 1975]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में ऐसी वाहिका में से जो दो वृत्तों $r=a$ तथा $r=b(b>a)$ से परिवद्ध हो जब श्यान असंपीड्य द्रव बह रहा हो तो उपमें ताप तथा वेग वितरणों का अध्ययन किया गया है। अनुभाग 1 में किसी वाह्य बल की उपस्थिति में वेग वितरण के लिये व्यंजक प्राप्त किया गया है। अनुभाग 2 में इस व्यंजक का उपयोग ताप वितरण के लिये व्यंजक प्राप्त करने के हेतु ऊर्जा समीकरण में किया गया है। अनुभाग 3 में दोलायमान प्रवाह की विवेचना की गई है। अनुभाग 4 में ऊष्मा संयोजन के वाह्य दर के अन्तर्गत ताप वितरण हेतु हल प्राप्त किया गया है।

Abstract

On the temperature distribution through a channel bounded by two circles. *By* R. C. Tripathi, S. B. Srivastava and S. N. Singh, Department of Mathematics, Faculty of Science, Banaras Hindu University, Varanasi.

In the present paper the temperature and velocity distributions in a channel bounded by two circles $r=a$ and $r=b(b>a)$ have been obtained when viscous incompressible fluid is flowing through it. In section 1, the expression for the velocity distribution has been deduced in the presence of some external force. In section 2, this expression is used in the energy equation to find the expression for the temperature distribution. In section 3, the oscillatory flow has been discussed. In section 4, the solution for temperature distribution is obtained under external rate of heat addition.

विषय प्रवेश

ग्राएट्ज, नुसेल्ट, गोल्डस्टीन तथा लाइटहिल ने वृत्ताकार नली में ताप वितरण की विवेचना की हैं। ये सभी विवेचनायें गोल्डस्टीन की पुस्तक[3] में दी हैं। ईगल तथा फरगुसन[2] ने ताप के वितरण

के लिये एक व्यंजक प्राप्त किया है जिसमें वृत्ताकार पीतल की नलिका को प्रत्यावर्ती धारा द्वारा गरम किया जाता है और इसमें से होकर श्यान असंपीड्य द्रव बहता होता है। लाल[5] ने दो समअक्षीय वृत्ताकार पाइपों द्वारा परिबद्ध वाहिका में ताप-वितरण पर विचार किया है जब इसमें से होकर असंपीड्य द्रव बहता होता है और ऊष्मा संभरण की दर समय का घातांकी फलन होता है।

प्रस्तुत शोधपत्र में हम ऐसी वाहिका में ताप तथा वेग वितरणों पर विचार करेंगे जिसकी अक्ष z-अक्ष पर है। इस शोध पत्र में 4 अनुभाग हैं। अनुभाग 2 में बाह्य बल की उपस्थिति में वाहिका में से होकर श्यान स्तरीय असंपीड्य द्रव प्रवाह के लिये वेग वितरण व्यंजक दिया गया है; अनुभाग 2, में ताप वितरण के लिये व्यंजक प्राप्त किया गया है। अनुभाग 3 में दोलायमान प्रवाह की विवेचना है और अनुभाग 4 में ताप वितरण के लिये हल प्रस्तुत किया गया है जब ऊष्मा योजन की बाह्य दर $\frac{\partial Q}{\partial t}=Ke^{i\omega t}$ के रूप में है।

1. माना कि वाहिका की अक्ष Z-अक्ष है और इसमें से होकर असंपीड्य द्रव बह रहा है। अपरिवर्ती दशा गति में $q_r=0=q_\theta$, $q_z=f(r)$. गति का समीकरण [1, eqn. 3. 17]

$$\rho\frac{Dq_z}{Dt}=Z_0-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 q_z. \tag{1·1}$$

प्रस्तुत प्रसंग में,

$$\mu\left[\frac{d^2q_z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dq_z}{dr}\right]=\frac{\partial p}{\partial z}-Z_0. \tag{1·2}$$

स्थिर दाब प्रवणता $\frac{\partial p}{\partial z}$ को $-P$ तथा वाह्य बल Z_0 को λr^n मानने पर

$$\frac{d^2q_z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dq_z}{dr}=-\frac{P}{\mu}-\frac{\lambda r^n}{\mu}. \tag{1·3}$$

(1·3) को समाकलित करने पर

$$r\frac{dq_z}{dr}=-\frac{Pr^2}{2\mu}-\frac{\lambda r^{n+2}}{\mu(n+2)}+C. \tag{1·4}$$

जहाँ C समाकलन स्थिरांक है। किन्तु वाहिका की अक्ष पर वेग प्रवणता परिमित है अतः $C=0$

(1·4) को पुनः समाकलित करने पर

$$q_z=-\frac{Pr^2}{4\mu}-\frac{\lambda r^{n+2}}{\mu(n+2)^2}+D \tag{1·5}$$

जहाँ D समाकलन स्थिरांक है।

माना $r=a$ वाहिका की आन्तरिक सीमा है और $r=b$ वाह्य सीमा

सीमा प्रतिबन्धों को

$$q_z=q_{z_1}, \text{ जब } r=a \tag{1·6}$$

तथा
$$q_z=0, \text{ जब } r=b \tag{1·7}$$

मानने पर (1·5) में स्थिरांक D निश्चित है । इस प्रकार

$$q_z=\frac{q_{z_1}\left\{\frac{P}{4\mu}(r^2-b^2)+\frac{\lambda}{\mu}\frac{(r^{n+2}-b^{n+2})}{(n+2)^2}\right\}}{\frac{P}{4\mu}(a^2-b^2)+\frac{\lambda}{\mu}\frac{(a^{n+2}-b^{n+2})}{(n+2)^2}} \tag{1·8}$$

समीकरण (1·8) वाह्य वब की उपस्थिति में वेग वितरण बताता है । जब $n=0$ तो $q_z>0$ और तब वेग वितरण किसी वाह्य वल की अनुपस्थिति में होता है ।

2. ऊर्जा समीकरण (1; eqn. 3·38)

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}=-\frac{1}{K}\phi_c, \tag{2·1}$$

में समानीत हो जाता है, जहाँ

$$\phi_c=\mu\left[\frac{dq_z}{dr}\right]^2 \tag{2·2}$$

समीकरण (1·4) से समीकरण (2·1) में मान रखने पर

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}=-\frac{1}{K}\left[\frac{P^2r^2}{4\mu}+\frac{\lambda^2r^{2n+2}}{\mu(n+2)^2}+\frac{\lambda P}{\mu}\frac{r^{2+n}}{n+2}\right] \tag{2·3}$$

(2·3) को समाकलित करने पर

$$T=-\frac{P^2r^4}{64\mu k}-\frac{\lambda^2r^{2n+4}}{4\mu k(n+2)(2n+4)^2}-\frac{\lambda Pr^{n+4}}{(n+2)(n+4)^2\mu k}+C\log r+D \tag{2·4}$$

जहाँ C तथा D समाकलन के स्थिरांक हैं जो सीमा प्रतिबन्धों के द्वारा निर्धारित किये जाते हैं ।

सीमा प्रतिबन्धों को

तथा
$$\left.\begin{array}{l} r=a, \; T=T_1 \\ r=b, \; T=T_2, \end{array}\right\} \tag{2·5}$$

मानने पर (2·4) में C तथा D स्थिरांक निश्चित हैं ।

इस प्रकार

$$T=\frac{T_2 \log\left(\frac{r}{a}\right)+T_1 \log\left(\frac{b}{r}\right)+Q_1 \log\left(\frac{b}{a}\right)-Q_2 \log\left(\frac{r}{a}\right)}{\log\left(\frac{b}{a}\right)} \tag{2·6}$$

जहाँ

$$Q_1=\frac{P^2(a^4-r^4)}{64\mu k}+\frac{\lambda^2(a^{2n+4}-r^{2n+4})}{4\mu k(n+2)^2(2n+4)^2}+\frac{\lambda P(a^{n+4}-r^{n+4})}{\mu k(n+2)(n+4)^2} \tag{2·7}$$

तथा

$$Q_2=\frac{P^2(a^4-b^4)}{64\mu k}+\frac{\lambda^2(a^{2n+4}-b^{2n+4})}{4\mu k(n+2)^2(2n+4)^2}+\frac{\lambda P(a^{n+4}-b^{n+4})}{\mu k(n+2)(n+4)^2} \tag{2·8}$$

समीकरण (2·6) वाहिका में ताप-वितरण के लिए व्यंजक है।

3. माना कि धारा अस्थिर है और दोलनों से युक्त है तो वेग वितरण [1; eqn. 12.56]

$$q_{z_1}=\frac{K}{4v}(a^2-r^2)\cos\omega t \tag{3·1}$$

है और तब ऊर्जा समीकरण निम्नवत् हो जाता है :

$$\rho c_v\frac{\partial T}{\partial t}=k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right]+\frac{K^2\rho^2\, r^2\cos^2\omega t}{4v} \tag{3·2}$$

समीकरण (3·2) को

$$\frac{\partial T}{\partial t}=K'\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+r^2k''(1+\cos 2\omega t) \tag{3·3}$$

के रूप में रखें जहाँ

$$\left.\begin{aligned} k' &= \frac{k}{\rho c_v} \\ \text{तथा}\quad k'' &= \frac{k^2}{8vc_v}\end{aligned}\right\} \tag{3·4}$$

(3·3) के लिये माना कि $T=f(r)\quad[1+\cos 2\omega t]$ (3·5)

अब $\frac{\partial T}{\partial t}$ शून्य हो जाता है क्योंकि ω इतना लघु है कि ω के वर्ग तथा उच्च घात वाले समस्त पद उपेक्ष्य हो जाते हैं।

समीकरण (3·3) तथा (3·5) से हमें (3·6) प्राप्त होता है

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+\frac{k''}{k'}r^2=0 \quad (3\cdot6)$$

समीकरण (3·6) से

$$f=-\frac{r^4}{16}\frac{k''}{k'}+A_1 \log r+B_1 \quad (3\cdot7)$$

प्राप्त होता है।

चूँकि अक्ष पर ताप $t>0$ के लिये परिमित है अतः $A_1=0$.

इसी प्रकार
$$f=-\frac{r^4}{16}\frac{k''}{k'}+B_1 \quad (5\cdot8)$$

सीमा प्रतिबन्धों को

तथा
$$\left.\begin{array}{l} T=T_1=f_1(1+\cos 2\omega t) \ \ r=a \text{ पर} \\ T=T_2=f_2(1+\cos 2\omega t) \ \ r=b \text{ पर} \end{array}\right\} \text{ यदि } t>0 \quad (3\cdot9)$$

फलस्वरूप

तथा
$$\left.\begin{array}{l} f=f_1 \quad r=a \text{ पर} \\ f=f_2 \quad r=b \text{ पर} \end{array}\right\} \quad (3\cdot10)$$

उपर्युक्त प्रतिबन्धों की सहायता से (3·8) में स्थिरांक B_1 निश्चित है, इस प्रकार

$$f=\frac{f_1(r^4-b^4)+f_2(a^4-r^4)}{a^4-b^4} \quad (3\cdot11)$$

तब हमें

$$T=\left[\frac{f_1(r^4-b^4)+f_2(a^4-r^4)}{a^4-b^4}\right](1+\cos 2\omega t) \quad (3\cdot12)$$

जब ω काफी लघु होता है कि ω के वर्ग तथा उच्च घात वाले पद उपेक्षणीय हो जाते हैं तब समीकरण (3·2) का हल (3·12) हो जाता है। यदि हम (3·12) में $r/a=n_1$ तथा $b/a=n$ रखें तथा $f_1=f_2=1$, मानें तो

$$T=(1+\cos 2\omega t) \quad (3\cdot13)$$

यह देखा जाता है कि $2\omega t$ में ह्रास के साथ T बढ़ता है और इसका उच्चतम मान तब पाया जाता है जब $2\omega t$ शून्य होता है।

यह मान लेने पर कि दाब प्रवणता लघु है या तरल हल्का है जिससे कि $K^2 \simeq 0$ या $\rho^2 \simeq 0$ या K तथा ρ दोनों ही लघु मात्रायें हैं समीकरण (3·2)

$$\frac{\partial T}{\partial t}=K'\left(\frac{}{\partial r^2}+\frac{}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) \tag{3·14}$$

में समानीत हो जाता है। (3·14) का हल

$$T=\frac{A}{t}\,e^{-r^2/4k't}+B \tag{3·15}$$

है जहाँ स्थिरांक A तथा B सीमा प्रतिबन्धों से निर्धारित होते हैं।

माना कि सीमा प्रतिबन्ध

$$T=T_1 \text{ जब } r=a \tag{3·16}$$

तथा

$$T=T_2 \text{ जब } r=b \tag{3·17}$$

हैं। उपर्युक्त प्रतिबन्धों की सहायता से (3·15) में स्थिरांक A का निश्चयन किया जाता है। इस प्रकार (3·18) प्राप्त होता है

$$T=T_1+\frac{T_2[e^{-a^2/4k't}-e^{-r^2/4k't}]+T_1[e^{r^2/4k't}-e^{-a^2/4k't}]}{e^{-a^2/4k't}-e^{-b^2/4k't}} \tag{3·18}$$

समीकरण (3·18) ताप-वितरण का व्यंजक है जब दाब प्रवण अत्यन्त लघु हो तथा तरल अत्यन्त हल्का हो।

4. माना कि ऊष्मा-योजन की दर

$$\frac{\partial Q}{\partial t}\neq 0 \text{ तथा } \frac{\partial Q}{\partial t}-Ke^{i\omega t} \tag{4·1}$$

है।

जब गति दोलायमान होती है और दाब प्रवण अत्यन्त लघु होता है तो ऊर्जा समीकरण (4·1) में की गई कल्पना के अन्तर्गत (4.2) में समानीत हो जाता है

$$\rho c_v\frac{\partial r}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial Q}{\partial t} \tag{4·2}$$

समीकरण (4·2) को हल करने के लिये, माना कि

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial Q}{\partial t}=Ke^{i\omega t}\\ \text{तथा}\quad &T(r,t)=f(r)e^{i\omega t}\end{aligned}\right\} \tag{4·3}$$

फलतः समीकरण (4·2)

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{\rho c_v i\omega}{k}f=-\frac{K}{k} \tag{4·4}$$

में समानीत हो जाता है। (4·4) के लिये, माना कि

$$F=\frac{K}{k}-\frac{\rho c_v i\omega}{k}f \tag{4·5}$$

तो

$$\frac{d^2F}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{dF}{dr}-\frac{\rho c_v i\omega}{k}F=0 \tag{4·6}$$

समीकरण (4·6) का हल[4]

$$F=D_n' J_0(rpi^{3/2})+E_n' Y_0(rpi^{3/2}) \tag{4·7}$$

है जहाँ $p=\sqrt{\left(\frac{\omega\rho c_v}{k}\right)}$, J_0 तथा Y_0 शून्य कोटि के प्रथम तथा द्वितीय के प्रकार के बेसेल फलन हैं।

अतः

$$T(r,t)=\left[-\frac{iK}{\rho c_v\omega}+D_n J_0(rpi^{3/2})+E_n Y_0(rpi^{3/2})\right]c^{i\omega t} \tag{4·8}$$

दोलायमान प्रवह को अध्यारोपित करने के पूर्व हमें पूर्णतया विकसित स्थिर स्तरीय गति प्राप्त होती है। इस प्रतिबन्ध के साथ तथा निम्नांकित सीमा प्रतिबन्धों का प्रयोग करते हुये

$$T=T_1=f_1e^{i\omega t} \text{ जब } r=na \tag{4·9}$$

तथा

$$T=T_2=f_2e^{i\omega t} \text{ जब } r=b \tag{4·10}$$

फलस्वरूप

$$f=f_1 \text{ जब } r=a \tag{4·11}$$

तथा

$$f=f_2 \text{ जब } r=b \tag{4·12}$$

(4·8) में D_n तथा E_n स्थिरांकों को उपर्युक्त प्रतिबन्धों की सहायता से ज्ञात किया जाता है। इस प्रकार

$$T=R\left(-\frac{ik}{\rho c_v\omega}\right)\frac{[1-](y_0(bpi^{3/2})-y_0(api^{3/2}))J_0(rpi^{3/2})-\{J_0(pbi^{3/2})-J_0(api^{3/2})Y_0\}}{J_0(api^{3/2})y_0(bpi^{3/2})-J_0(bpi^{3/2})y_0(api^{3/2})}e^{i\omega t}$$

$$+\frac{R[\{T_1 Y_0(bpi^{3/2})-T_2Y_0(api^{3/2})\}J_0(rpi^{3/2})-\{T_1J_0(bpi^{3/2})-T_2J_0(api^{3/2})\}Y_0]e^{i\omega t}}{J_0(api^{3/2})Y_0(bpi^{3/2}-J_0(bpi^{3/2})Y_0(api^{3/2})} \tag{4·13}$$

जहाँ R वास्तविक अंश के लिये आया है। समीकरण (4·13) अध्ययनगत वाहिका में ताप-वितरण के लिये व्यंजक है

$T_1=T_2$ मानने पर ज्यों ज्यों $a\to 0$

$$T=R\left[-\frac{iK}{\rho c_v\omega}\left\{1-\frac{J_0(rpi^{3/2})}{J_0(bpi^{3/2})}\right\}\right]e^{i\omega t}+R\,\frac{[T_1J_0(rpi^{3/2})e^{i\omega t}]}{J_0(bpi^{3/2})} \tag{4·14}$$

समीकरण (4·14) वृत्तीय पाइप के लिये ताप वितरण है।

जब घनत्व, दोलन तथा c_v लघु होता है तो समीकरण (4·4) से

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}=-\frac{K}{k} \tag{4·15}$$

प्राप्त होता है।

(4·15) को समाकलित करने पर

$$f=-\frac{Kr^2}{4k}+A_2\log r+B_2. \tag{4·16}$$

समीकरण (4·16) (4·4) का सन्निकट हल है।

माना कि सीमा प्रतिबन्ध

$$\left.\begin{aligned} &f=f_1 \text{ जब } r=a\\ \text{तथा}\quad &f=f_2 \text{ जब } r=b\end{aligned}\right\} \tag{4·17}$$

उपर्युक्त प्रतिबन्धों की सहायता से (4·16) में A_2 तथा B_2 स्थिरांकों का मान ज्ञात करने पर

$$f=\frac{4kf_1\log\left(\frac{r}{b}\right)-4kf_2\log\left(\frac{r}{a}\right)+K(a^2-r^2)\log\left(\frac{a}{b}\right)-K(b^2-a^2)\log\left(\frac{r}{a}\right)}{4k\log(a/b)} \tag{4·18}$$

इस प्रकार $T(r,t)=f(r)e^{i\omega t}$

$$=\frac{\left[4kf_1\log\left(\frac{r}{b}\right)-4kf_2\log\left(\frac{r}{a}\right)+K(a^2-r^2)\log\left(\frac{a}{b}\right)-K(b^2-a^3)\log\left(\frac{r}{a}\right)\right]e^{i\omega t}}{4k\log(a/b)} \tag{4·19}$$

(4·19) के वास्तविक अंश पर विचार करने पर

$$T=\frac{\left[4kf_1\log\left(\frac{r}{b}\right)-4kf_2\log\left(\frac{r}{a}\right)+K(a^2-r^2)\log\left(\frac{a}{b}\right)-K(b^2-a^2)\log\left(\frac{r}{a}\right)\right]\cos\omega t}{4k\log(a/b)} \tag{4·20}$$

समीकरण (4·20) में $r/a=n_1$ तथा $b/a=n$ रखने पर

$$T=\frac{\cos \omega t}{4k \log n}\left[4kf_1 \log n+4k(f_2-f_1) \log n_1+Ka^2(1-n_1^2) \log n+Ka^2(n^2-1) \log n\right] \tag{4·21}$$

जिसका उपयोग आलेखीय अभिव्यक्ति के लिये किया जा सकता है।

निर्देश

1. पाई, एस०, Viscous Flow Theory. I, INC. 1956.
2. ईगल, ए० तथा फर्गुसन, आर० एम०, **प्रोसी० रायल० सोसा०**, 1930, A **127**, 540-566.
3. गोल्डस्टीन, एस०, Modern Developements in Fluid Dynamics. भाग II, **आक्सफोर्ड**, 1908, 613-62
4. वाट्सन, जी ० एन०, Theorem of Bessel Functions. **कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस**
5. लाल, के०, **प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा० मैथ० फिजि० साइं०**, 1964, **60**, 653-656

Vijnana Parisad Anusandhan Patrika
Vol. 18, No. 4, October, 1975, Pages 381-389

G-फलनों का समाकलन

एम० ए० सिमारी तथा एस० आब्देल मलक
काहिरा हाई इन्स्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी, मिश्र

[प्राप्त—अक्टूबर 15, 1975]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में G-फलनों वाले दो समाकलों का मान G-फलनों के पदों में ज्ञात किया गया है।

Abstract

Integration of G-function. *By* M. A. Simary and S. Abdel Malak, Cairo High Institute of Technology, Egypt.

In this note we evaluate two integrals involving G-functions, in terms of G-functions.

1. **भूमिका**

G-फलन को मेलिन-बार्नीज कन्टूर समाकल

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-s)}\, z^s\, ds, \quad (1)$$

द्वारा परिभाषित करते हैं जहाँ $0\leqslant m\leqslant q$, $0\leqslant n\leqslant p$ तथा पथ L $-i\infty$ से $+i\infty$ से प्रारम्भ होता है जिससे कि $\Gamma(b_j-s), j=1, 2, \ldots, m$ के समस्त पोल L के दाईं ओर और $\Gamma(1-a_j+s), j=1, 2, \ldots, n$ के समस्त पोल उसके बाईं ओर पड़ें। यह समाकल अभिसारी होता है यदि $p+q<2(m+n)$ तथा $|\arg z|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$.

G-फलन की अधिक परिभाषाओं एवं गुणों के लिये सन्दर्भ[1] देखना चाहिए।

2. कुछ प्रमेयिकायें

मुख्य सूत्रों (प्रमेय 1 तथा 2) की उपपत्ति के लिये हमें निम्नांकित प्रमेयिकाओं (लेमा) की आवश्कता होगी।

प्रमेयका 1

$$\left[G_{42}^{22}\left(z \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}, 1; \frac{b}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{1}{2}; \end{matrix} \right. \right) \right]^2 = \pi^{3/2}\, 2^{b-2a+1} \tag{2}$$

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b-a)}\, G_{42}^{21}\left(-z \left| \begin{matrix} 1; b, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}b+\frac{1}{2} \\ a, b-a; \end{matrix} \right. \right)$$

इस प्रमेयिका को सिद्ध करने के लिये निम्नांकित सूत्रों का उपयोग किये जा सकता है:

$${}_1F_1(a; b : z)\, {}_1F_1(a; b : -z) \tag{3}$$

$$= {}_2F_3\left(a, b-a; b, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}(b+1) : z^{2/4}\right),$$

[1, p. 186]

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p : z \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \right) = \frac{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(a_j)}\, G_{p, q+1}^{1, p}\left(-z \left| \begin{matrix} 1-a_1, \ldots, 1-a_p \\ 0; 1-b_1, \ldots, 1-b_q \end{matrix} \right. \right), \tag{4}$$

[1, p. 215]

$$\Gamma(2z) = (2\pi)^{-1/2}\, 2^{2z-1/2}\, \Gamma(z)\, \Gamma(z+\tfrac{1}{2}) \tag{5}$$

प्रमेयिका 2

$$G_{p, q}^{m, n}\left(x \left| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_n; \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_m; \ldots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \left[\prod_{r=1}^{t} \Gamma(a_p - b_{q-r+1}) \right]^{-1}$$

$$\prod_{r=1}^{t} \int_0^1 y_r^{-a_r} (1-y_r)^{a_r - b}\, q-r+1^{-1}$$

$$G_{p-t, q-t}^{m, n-t}\left(x \cdot y_1 \cdots y_t \left| \begin{matrix} a_{t+1}, \ldots, a_n; \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_m; b_{q-t} \end{matrix} \right. \right) dy_1 \ldots dy_t$$

जहाँ $Re\, b_{q-r+1} < Re\, a_r,\ p+q < 2(m+n)$ तथा $|\arg x| < (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$.

इस प्रमेयिका को निम्नांकित सूत्रों का प्रयोग करके सिद्ध किया जा सकता है:

$$\int_0^1 y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha-\beta-1}\, G_{p,q}^{m,n}\left(xy \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_n; \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_m; \ldots, b_q \end{matrix}\right) dy \tag{6}$$

$$= \Gamma(\alpha-\beta)\, G_{p+1,\, q+1}^{m,\, n+1}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha, a_1, \ldots, a_n; \ldots, a_p \\ b_1 \ldots, b_m; \ldots, b_q, \beta \end{matrix}\right),$$

[1, p. 214]

प्रमेयिका 3

$$G_{p,q}^{m,n}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_n; \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_m; \ldots, b_q \end{matrix}\right) = \prod_{r=1}^{t} \int_0^\infty e^{-y_r}\, y_r^{-a_r} \tag{7}$$

$$G_{p-t,\, q}^{m,\, n-t}\left(x \,.\, y_1 \ldots y_t \,\middle|\, \begin{matrix} a_{r+1}, \ldots, a_n: \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_m, \ldots b_q \end{matrix}\right) dy_1 \ldots dy_t.$$

इस प्रमेयिका को निम्नांकित सूत्रों की सहायता से सिद्ध किया जा सकता है:

$$\int_0^\infty e^{-y}\, y^{-a}\, G_{p,q}^{m,n}\left(xy \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_n; \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_n; \ldots, b_q, \end{matrix}\right) dy \tag{8}$$

$$= G_{p+1,\, q}^{m,\, n+1}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} a, a_1, \ldots, a_n; \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_m; \ldots, b_q \end{matrix}\right)$$

जहाँ $p+q < 2(m+n),\ |\arg x| < (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi,\ Re\,\alpha < Re\, b_h + 1,\ h=1, \ldots, m$, [1, p. 214]

प्रमेयिका 4

$$G_{p,q}^{m,n}\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_n; \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_m; \ldots, b_q \end{matrix}\right) = \left[\prod_{r=1}^{t} \frac{1}{\Gamma(a_{p-r+1} - b_r}\right] \tag{9}$$

$$\left[\prod_{r=1}^{t} \int_0^1 y_r^{b_r-1}\,(1-y_r)^{a_{p-r+1}-b_r-1}\right]$$

$$G_{p-t,\, q-t}^{m-t,\, n}\left(\frac{x}{y_1 \ldots y_t} \,\middle|\, \begin{matrix} a_1, \ldots, a_n; \ldots a_{p-t} \\ b_{t+1}, \ldots, b_m; \ldots, b_q \end{matrix}\right) dy_1 \ldots dy_t,$$

जहाँ $Re\,(b_r) < Re\, a_{p-r+1},\ p+q < 2(m+n)$ तथा $|\arg x| < (m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$.

इस प्रमेयिका को सिद्ध करने के लिये निम्नांकित सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-\alpha-1} G_{p,q}^{m,n}\left(\frac{x}{y}\middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_n; \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_m; \ldots, b_q \end{matrix}\right) dy \tag{10}$$

$$=\Gamma(\beta-\alpha)\; G_{p+1,q+1}^{m+1,n}\left(x\middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_n; \ldots, a_p, \beta \\ \alpha, b_1, \ldots, b_m; \ldots, b_q \end{matrix}\right)$$

जिसकी स्थापना निम्न प्रकार से की जा सकती है:

G-फलन के स्थान पर इसका समाकल सूत्र रखने पर समीकरण (10) का वाम पक्ष

$$\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-\alpha-1} \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-s)} x^s y^{-s}\, ds\, dy$$

हो जावेगा। समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-s)} x^s \int_0^1 y^{\alpha-s-1}(1-y)^{\beta-\alpha-1}\, dy\, ds.$$

निम्नांकित सूत्र का प्रयोग करने पर

$$\beta(x, y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{11}$$

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-s)} x^s \frac{\Gamma(\alpha-s)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta-s)}\, ds$$

$$=\Gamma(\beta-\alpha)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(\alpha-s)\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j-s)\Gamma(\beta-s)} x^s\, ds$$

$=$(10) का दायां पक्ष

प्रमेयिका 5

$$G_{p,q}^{m,n}\left(x\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n;\ldots,a_p\\ b_1;\ldots,b_m;\ldots b_q\end{matrix}\right.\right)=\prod_{j=1}^{t}\int_0^\infty e^{-y_r}\,y_r^{b_r-1} \tag{12}$$

$$G_{p,q-t}^{m-t,n}\left(\frac{x}{y_1\cdots y_t}\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n;\ldots,a_p\\ b_{t+1},\ldots,b_m;\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)dy_1\ldots dy_t,$$

जहाँ $p+q<2(m+n)$ तथा $|\arg x|<(m+n-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$.

प्रमेयिका को निम्नांकित सूत्र की सहायता से सिद्ध किया जा सकता है:

$$\int_0^\infty e^{-y}\,y^{a-1}\,G_{p;q}^{m,n}\left(\frac{x}{y}\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n:\ldots,a_p\\ b_1,\ldots,b_m;\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right)dy \tag{13}$$

$$=G_{p,q+1}^{m+1,n}\left(x\left|\begin{matrix}a_1,\ldots,a_n;\ldots,a_p\\ a,b_1,\ldots,b_m;\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right),$$

जिसकी स्थापना ठीक उसी प्रकार से की जा सकती है जैसे (10) की।

3. G-फलन वाले दो समाकलों का मूल्यांकन

प्रमेय 1

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}x^s \tag{15}$$

$$G_{p+4,q+2}^{m+2,n+2}\left[x\left|\begin{matrix}\frac{1}{2},1,a_1-s,\ldots,a_n-s;\ldots,a_p-s,\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\\ \frac{a}{2},\frac{a}{2}+\frac{1}{2},b_1-s,\ldots,b_m-s;\ldots,b_q-s\end{matrix}\right.\right]ds$$

$$=\frac{\pi^{3/2}\,2^{b-2a+1}\Gamma(a)}{\Gamma(b-a)}\;G_{p+4,q+2}^{m+2,n+1}\left(-x\left|\begin{matrix}1,a_1,\ldots,a_n;\ldots,a_p,b,\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\\ a,b-a,b_1,\ldots,b_m;\ldots,b_q\end{matrix}\right.\right),$$

जहाँ $Re\,(a_{r+1}-b_{q+r})>0(r=0,1,\ldots,q-1)$, $Re\,(a_t)>0\ (t=1,\ldots,p)$

$Re\,(b_h+1-a_h)>0\ (h=m+1,\ldots,q)$, $0\leqslant m\leqslant q$, $0\leqslant n\leqslant p$, $p\geqslant q$, $p+q<2(m+n)$, $|\arg x|<\left(m+n-\frac{p}{2}-\frac{q}{2}\right)\pi$,

a तथा b ऐसे हैं कि G-फलन का अस्तित्व रहे। समाकलन का कंटूर $-i\infty$ से $i\infty$ तक जाता है जिससे कि $\Gamma(b_j-s)(j=1,2,\ldots,m)$ के समस्त पोल दाईं ओर तथा $\Gamma(1-a_k+s)(k=1,2,\ldots,n)$ के समस्त पोल बाईं ओर पड़ें।

उपपत्ति

हम $p=n+n_1$, $q=m+m_1$ लिख सकते हैं जहाँ $n_1+m_1<n+m$ । हम $n_1<m$ मानेंगे और निम्नांकित चरणों का अनुगमन करेंगे:

(i) हम समस्त a तथा b में से n प्राचल की कटौती करते हैं और प्रमेयिका n का प्रयोग करते हैं तो

$$\text{वाम पक्ष} \;=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}-s\right)} x^s \prod_{r=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(a_{p-r+1}-b_r)}$$

$$\prod_{r=1}^{n1}\int_0^1 y_r^{b_r-s-1}(1-y_r)^{a_{p-r+1}-b_r-1}\prod_{r=1}^{n1} dy_r$$

$$G^{m+2-n_1,\, n+2}_{p+4-n_1,\, q+2-n_1}\left[\frac{1}{y_1\cdots y_{n_1}}\, x \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, a_1-s, \ldots, a_n-s;\ \frac{b}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{1}{2}, b_{n_1+1}-s,\ b_m-s, b_q-s \end{matrix}\right.\right] ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}-s\right)} x^s I_{IV} \prod_{r=1}^{n1} y_r^{-s}$$

$$G^{m+2-n_1,\, n+2}_{p+4-n_1,\, q+2-n_1}\left[\frac{1}{y_1\cdots y_{n_1}}\cdot x \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, a_1-s, \ldots, a_n-s;\ \frac{b}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{1}{2}, b_{n_1+1}-s, \ldots, b_m-s, \ldots, b_q-s, \end{matrix}\right.\right] ds, \text{ माना}$$

(ii) हम समस्त b में से $(m-n_1)$ प्राचल कम करते हैं और प्रमेयिका 5 का व्यवहार करते हैं तो:

$$\text{वाम पक्ष} =\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}-s\right)} x^s I_{IV} \prod_{r=1}^{n1} y_r^{-s}$$

$$\prod_{r=n_1+1}^{m}\int_0^\infty e^{-y_r} y_r^{b_r-s-1}\prod_{r=n_1+1}^{m} dy_r$$

$$G^{2,\, n+2}_{p+4-n_1,\, q+2-m}\left[\frac{1}{y_1\cdots y_m}\cdot x \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, a_1-s, \ldots, a_{n-s}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{1}{2}, b_{m+1}-s, \ldots, b_q-s \end{matrix}\right.\right] ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}x^s I_{IV}I_V\prod_{r=1}^{m}y_r^{-s}$$

$$G^{2,\,n+2}_{p+4-n_1,\,q+2-m}\left[\frac{1}{y_1\ldots y_m}x\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2},1,a_1-s,\ldots,a_n-s,\frac{b}{2},\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\\ \frac{a}{2},\frac{a}{2}+\frac{1}{2},b_{m+1}-s,\ldots,b_q-s\end{matrix}\right]ds$$

(iii) माना कि $n>m_1$; समस्त a तथा b में से m_1 प्राचल कम कर देने पर तथा प्रमेयिका 2 को व्यवहृत करने पर

$$\text{वाम पक्ष}\quad=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}x^s I_{IV}I_V\prod_{r=1}^{m}y_r^{-s}$$

$$\prod_{r=1}^{m1}\int_0^1 Z_r^{-a_r+s}(1-Z_r)^{a_r-b}\,q-r+1^{-1}\prod_{r=1}^{m1}dZ_r$$

$$G^{2,\,n-m_1+2}_{p+4-(n_1+m_1),\,2}\left[x\,.\,\frac{z_1\ldots z_{m_1}}{y_1\ldots y_m}\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2},1,a_{m_1+1}-s,\ldots,a_n-s,\frac{b}{2},\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\\ \frac{a}{2},\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\end{matrix}\right]ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}x^s I_{IV}I_V I_{II}\prod_{r=1}^{m}y_r^{-s}$$

$$\prod_{j=1}^{m1}z_j^s\,G^{2,\,n+m_1+2}_{p+4-(n_1+m_1),\,2}\left[x\,.\,\frac{z_1\ldots z_{m_1}}{y_1\ldots y_m}\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2},1,a_{m_1+1}-s,\ldots,a_n-s,\frac{b}{2},\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\\ \frac{a}{2},\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\end{matrix}\right]ds$$

(iv) समस्त a से $n-m_1$ प्राचल कम करने तथा प्रमेयिका 2 को व्यवहृत करने पर

$$\text{वाम पक्ष}\quad=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}x^s I_{IV}\,.\,I_V\,.\,I_{II}\prod_{r=1}^{m}y_r^{-s}$$

$$\prod_{j=1}^{m1} z_j^s \prod_{j=m_1+r}^{n} \int_0^\infty e^{-z_j} z_j^{-a_j+s} dz_r$$

$$G_{42}^{22}\left[x \cdot \frac{z_1 \dots z_n}{y_1 \dots y_m} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{1}{2} \end{matrix}\right] ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}-s\right)} x^s I_{IV} \cdot I_V \cdot I_{II} \cdot I_{III} \prod_{r=1}^{m} y_r^{-s} \prod_{j=1}^{n} z_j^s$$

$$G_{42}^{22}\left[x \cdot \frac{z_1 \dots, z_n}{y_1 \dots y_m} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{1}{2} \end{matrix}\right] ds.$$

गुणकों के क्रम को परिवर्तित करने पर

$$\text{वाम पक्ष} \quad = I_{IV} \cdot I_V \cdot I_{II} \cdot I_{III} \; G_{42}^{22}\left[x \cdot \frac{z_1 \dots, z_n}{y_1 \dots y_m} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{1}{2} \end{matrix}\right]$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Gamma(s)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{b}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}-s\right)} x^s \left(\frac{z_1 \dots z_n}{y_1 \dots y_m}\right)^s ds.$$

$$= I_{IV} \cdot I_V \cdot I_{II} \cdot I_{III} \; G_{42}^{22}\left[x \cdot \frac{z_1 \dots z_n}{y_1 \dots y_m} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{1}{2} \end{matrix}\right]$$

$$G_{42}^{22}\left[x \cdot \frac{z_1 \dots z_n}{y_1 \dots y_m} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}, 1, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2}, \frac{a}{2}+\frac{1}{2} \end{matrix}\right]$$

$$= I_{IV} I_V I_{II} I_{III} \pi^{3/2} 2^{b-2a+1} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b-a)}$$

$$G_{42}^{22}\left[-x \frac{z_1 \dots z_n}{y_1 \dots y_m} \middle| \begin{matrix} 1;\ b,\ \frac{1}{2}b,\ \frac{1}{2}b+\frac{1}{2} \\ a,\ b-a; \end{matrix}\right] \text{ प्रमेयिका (1) से}$$

उल्टी दिशा से प्रमेयिका 2, 3, 4 तथा 5 की पुनरावृत्ति करने पर हमें दक्षिण पक्ष की प्राप्ति होती है।

प्रमेय 2

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Gamma(s)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}-s\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma(a-s)\Gamma(a+\frac{1}{2}-s)}\,x^s \tag{16}$$

$$G^{m+2,\ n+2}_{p+4,\ q+2}\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2},1,a_1-s,\ldots,a_n-s;\ldots,a_p-s;b,b+\frac{1}{2}\\ \frac{b}{2},\frac{b}{2},\frac{1}{2},b_1-s,\ldots,b_m-s;\ldots,b_q-s\end{matrix}\right]ds$$

$$=2\pi^{3/2}\,G^{m+2,\ n+1}_{p+4,\ q+2}\left[-x\,\middle|\,\begin{matrix}1,a_1,\ldots,a_n;\ldots,a_p,a+\frac{1}{2},b+\frac{1}{2},a+b\\ \frac{1}{2}(a+b),\frac{1}{2}(a+b+1),b_1,\ldots b_m;\ldots,b_q\end{matrix}\right],$$

इसके प्रतिबन्ध प्रमेय 1 में दिये जा चुके हैं।

इसकी उपपत्ति प्रमेय 1 के ही समान है किन्तु हम सूत्र

$$G^{22}_{42}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2},1;a,a+\frac{1}{2}\\ \frac{a}{2},\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\end{matrix}\right]G^{22}_{42}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}\frac{1}{2},1,b,b+\frac{1}{2}\\ \frac{b}{2},\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\end{matrix}\right]=2\pi^{3/2} \tag{17}$$

$$G^{22}_{42}\left[-z\,\middle|\,\begin{matrix}1,a+\frac{1}{2},b+\frac{1}{2},a+b\\ \frac{1}{2}(a+b),\frac{1}{2}(a+b+1)\end{matrix}\right]$$

का प्रयोग करते हैं जिसका व्युत्पादन

$${}_1F_1\,(a;2a;z)\ \ {}_1F_1\,(b;2b;-z) \tag{18}$$

$$={}_2F_3\left[\frac{1}{2}(a+b),\frac{1}{2}(a+b+1);a+\frac{1}{2},\ b+\frac{1}{2},\ a+b;\ \frac{1}{4}z^2\right]$$

$|z|<1$, [1, p. 186] के द्वारा कर सकते हैं।

निर्देश

1. एडेल्यी, ए०, मैग्नस, डब्लू० ओबरहेटिनगर, एफ० तथा त्रिकोमी, ई०, Higher Transcendental Functions, भाग I, न्यूयार्क 1953

लेखकों से निवेदन

1 **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिए तथा पंक्तियों बीच में पार्श्व में संशोधन के लिए उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma'^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिए कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सके।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिए। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिए। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार हो कर आने चाहिए। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा! चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०। **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिण्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।

10. लेख "**सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, प्रयाग**", इस पते पर आने चाहिए। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबंध सम्पादक